



関西学院大学リポジトリ

Kwansei Gakuin University Repository

カットイデアルのグレブナー基底とその応用

著者	阪本 龍一
学位名	博士（理学）
学位授与機関	関西学院大学
学位授与番号	34504甲第719号
URL	http://hdl.handle.net/10236/00029096

カットイデアルのグレブナー基底とその応用

阪本 龍一

目次

	序文	3
第 1 章	グレブナー基底	5
1.1	単項式順序	5
1.2	グレブナー基底	6
1.3	割り算アルゴリズム	7
1.4	ブックバーガーのアルゴリズム	9
1.5	イニシャルイデアルと重み順序	10
1.6	トーリックイデアル	11
1.7	トーリックイデアルと消去理論	13
第 2 章	凸多面体とその三角形分割	15
2.1	凸多面体	15
2.2	凸多面体の三角形分割	16
2.3	イニシャル複体	17
2.4	Ehrhart 多項式と h^* 多項式	18
第 3 章	マルコフ基底とグレブナー基底	21
3.1	分割表	21
3.2	マルコフ基底	23
3.3	マルコフ基底とトーリックイデアル	24
第 4 章	カッティデアル	27
4.1	グラフにまつわる諸定義	27
4.2	カッティデアル	30
4.3	カッティデアルの既存の結果	32
4.4	カッティデアルと binary graph model	34

第 5 章	カットイデアルの 2 次グレブナー基底	35
5.1	サイクルのカットイデアル	35
5.2	辞書式・逆辞書式順序に関するグレブナー基底	42
5.3	カットイデアルの計算実験	48
第 6 章	$K_{2,m}$ のカット多面体の h^* 多項式	51
6.1	第 2 種 Stirling 数と Eulerian 多項式	51
6.2	$K_{2,n-2}$ のカット多面体の h^* 多項式	52
参考文献		57

序文

配置と呼ばれる特殊な整数行列から作られる代数系であるトーリックイデアルは, Sturmfels [23] によって, 凸多面体の正則三角形分割と, ある単項式順序に関するトーリックイデアルのイニシャルイデアルより決まる, イニシャル複体と呼ばれるものに対応することが示唆されたことにより注目されるようになった. 多面体的な問題を代数的な枠組みによってとらえることができるようになったのである. また, Conti-Traverso は, 整数計画問題からトーリックイデアルを作り出し, グレブナー基底を使用することによって, その整数計画問題を解くアルゴリズムを考案した [4]. アルゴリズムの世界では, 「計算が終わるまでの速さ」を主とした研究が盛んであるが, Conti-Traverso が考え出したものは「計算の速さ」では内点法などのアルゴリズムには分が悪いことが多い. しかし, 考えたい対象からトーリックイデアルを作り出し, そのグレブナー基底を使って問題を解くことができるという点でトーリックイデアルやグレブナー基底は興味深いものになったのである. その後, Diaconis-Sturmfels [5] は, 統計学における分割表の検定という問題について, 分割表から配置行列を考え, そのマルコフ基底とトーリックイデアルの生成系が対応することを示し, 検定に利用できることを示した. これら 3 つの結果から, トーリックイデアルのグレブナー基底は盛んに研究が行われるようになった.

また, グレブナー基底はそれ自体でも研究の対象として, あるいは解明のための道具として扱われてきた. グレブナー基底は廣中平祐と Bruno Buchberger により独立に提唱された. 両者の目的は異なっており, 廣中は代数多様体の特異点解消のために, Buchberger は多変数の多項式による零次元イデアルを用いた剰余環の具体的な構成のために導入した. このグレブナー基底は現在でも活発に研究されているが, その目的は代数的なものにとどまらず, 統計や符号・暗号など, 非常に広い範囲に応用できるものとなっている. 2008 年には Sturmfels-Sullivant が [25] において, グラフから導かれるトーリックイデアルが統計学に応用できることに言及し, このイデアルをカットイデアルと名付け, 基本的な結果・予想を述べている. また, 同様の手法で定義される凸多面体であるカット多面体の代数的性質や三角形分割に関連することなどについては, 大杉 [14] や Sullivant [26] などの研究結果が報告されている. 本論文では, 以下の 2 本の単著論文

1. Ryuichi Sakamoto, Lexicographic and reverse lexicographic quadratic Gröbner bases of cut ideals [18].
2. Ryuichi Sakamoto, The h^* -polynomial of the cut polytope of $K_{2,m}$ in the lattice spanned by its vertices [19].

に基づき、カットイデアルのグレブナー基底やカット多面体の三角形分割の h^* 多項式について述べる。

第 1 章では、グレブナー基底とトーリックイデアルを準備し、消去定理を用いたトーリックイデアルの具体的な計算方法等について述べる。第 2 章では、凸多面体とその三角形分割について定義と例を述べ、 h^* 多項式に関する定義や性質を述べる。第 3 章では、代数統計の初歩について述べる。これは Sturmfels-Sullivant が [25] で言及したカットイデアルの統計への応用に関して重要な内容である。第 4 章では、カットイデアルを定義し、既存の研究結果や未解決予想について述べる。Sturmfels-Sullivant が言及した統計学への応用に関してもここで述べる。第 5 章では、カットイデアルのグレブナー基底についての詳しい結果を見る。まずはサイクルのカットイデアルについて、次にトーリックイデアルの 2 次グレブナー基底に関する日比孝之の予想の反例、最後に計算実験について述べる。サイクルのカットイデアルの項では、「サイクルのカットイデアルは 2 次のグレブナー基底をある辞書式順序で持つ」という主張 [12] について、この主張の証明が誤りであることを述べる。日比予想の項では、「トーリックイデアルが 2 次グレブナー基底を持つとき、辞書式か逆辞書式順序のどちらかでも 2 次グレブナー基底を持つ」という予想の反例がカットイデアルにおいて存在することを紹介する。計算実験の項では、「そのカットイデアルが 2 次生成であるが 2 次グレブナー基底を持たないグラフ」の候補について述べる。第 6 章では、完全二部グラフ $K_{2,m}$ より導かれるカット多面体の h^* 多項式について述べる。完全二部グラフ $K_{2,m}$ はグレブナー基底が具体的にかつ良い条件であると判明しており [20]、標準単項式の数から直接 h^* 多項式を計算できる。

大学院の指導教授である大杉英史教授には、本研究に関して手厚い指導を賜り、さらに多くの貴重な御意見を頂きました。ここに感謝の意を表し、謝辞とさせていただきます。

2019 年 12 月

阪本 龍一

第 1 章

グレブナー基底

この章では，文献 [10] の第 1 章に基づいてグレブナー基底の定義と既存の結果について紹介し，トーリックイデアルなどの定義をする．グレブナー基底はイデアルの生成系であるが，冗長な元を持っていることもある．その分，「良い」性質を持った生成系となっている．流れとしては，1.1 節で単項式順序の定義と例を紹介し，1.2 節でグレブナー基底を定義する．そのあと，1.3 節で多変数の多項式による割り算を考える．ここで，「グレブナー基底を用いて割り算をすることで余りが一意に定まる」ことを見る．次に，1.4 節で生成系からグレブナー基底を計算する方法である，ブックバーガーのアルゴリズムを紹介し，実際にグレブナー基底計算の具体例を挙げる．次の 1.5 節では，イニシャルイデアルに関する結果を紹介し，重みベクトルによる単項式順序の定義を紹介する．最後に，1.6 節と 1.7 節ではトーリックイデアルの定義と既存の結果の紹介，消去定理との関係について見る．

1.1 単項式順序

体 K 上の n 変数多項式環 $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$ に対し， \mathcal{M}_n を $K[\mathbf{x}]$ 上のすべての単項式の集合とする．

Definition 1.1. ある \mathcal{M}_n 上の順序 $<$ が $K[\mathbf{x}]$ の単項式順序であるとは，次の 3 つの条件を満たすときに言う．

1. 任意の \mathcal{M}_n の単項式 u, v ($u \neq v$) に対し， $u < v$ か $v < u$ のどちらかが成り立つ．
2. 単項式 u, v が $u < v$ を満たすとき，任意の単項式 $w \in \mathcal{M}_n$ に対し， $uw < vw$ が成り立つ．
3. 1 でない \mathcal{M}_n の任意の単項式 u に対し， $1 < u$ が成り立つ．

Example 1.2. 単項式 $u = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, v = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$ が

$$\sum_{i=1}^n a_i > \sum_{i=1}^n b_i$$

を満たすとき, $u > v$ とする. また,

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$$

のとき, $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$ を考え,

1. もし最も左にある 0 でない要素が正であるとき $u > v$ とする. この順序 $<$ は単項式順序であり, 次数辞書式順序と呼ばれる.
2. もし最も右にある 0 でない要素が負であるとき $u > v$ とする. この順序 $<$ は単項式順序であり, (次数) 逆辞書式順序と呼ばれる.

次数辞書式順序の条件のうち, 次数を無視した順序を考えると単項式順序になり, この順序を辞書式順序と言う.

1.2 グレブナー基底

多項式 $f \in K[\mathbf{x}]$ が $u_1, \dots, u_t \in \mathcal{M}_n$ を用いて $f = a_1 u_1 + \dots + a_t u_t$ ($0 \neq a_i \in K, 1 \leq i \leq t$) と表されたとする. また, $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定しておく. このとき, f の $<$ に関するイニシャル単項式とは, f に現れる単項式のうち $<$ に関して最大の単項式 u_i であり, $\text{in}_<(f)$ と書く. また, f に現れる全ての単項式の集合 $\{u_1, \dots, u_t\}$ を f の台と言う. 次に, $K[\mathbf{x}]$ の 0 でないイデアル I と $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ を考える. このとき, I の任意の元の $<$ に関するイニシャル単項式で生成されるイデアル $\langle \text{in}_<(f) \mid 0 \neq f \in I \rangle$ を I の $<$ に関するイニシャルイデアルと言い, $\text{in}_<(I)$ と書く.

Definition 1.3. 多項式環 $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ を 1 つ固定する. また, I を $K[\mathbf{x}]$ のイデアルとし, $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\} \subset I$ とする. このとき, \mathcal{G} が $<$ に関するグレブナー基底であるとは, $\{\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s)\}$ が $\text{in}_<(I)$ の生成系となるときに言う.

多項式環 $K[\mathbf{x}]$ 上のイデアル I に対し, その根基 \sqrt{I} を

$$\sqrt{I} = \{f \in K[\mathbf{x}] \mid \exists a \in \mathbb{N} \text{ s.t. } f^a \in I\}$$

と定める. また, 単項式 $u = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \in \mathcal{M}_n$ に対し, $\sqrt{u} = \prod_{a_i > 0} x_i$ とする.

Proposition 1.4 ([10], 命題 5.5.5). いくつかの \mathcal{M}_n 上の単項式 m_1, m_2, \dots, m_s で生成される $K[x]$ 上のイデアル I に対して $\sqrt{I} = \langle \sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_s} \rangle$ が成り立つ.

単項式 m について, $\sqrt{m} = m$ が成り立つとき m をスクエアフリーという. この呼び方はイデアルなどについても共通である.

1.3 割り算アルゴリズム

1 変数の多項式の割り算は単純に変数の次数が大きいものから割り算していけば簡単に計算できた. しかし, 多変数の多項式における割り算は 1 変数のように単純にはいかない. その計算法を紹介する前に, 語句等の準備をする.

Theorem 1.5 ([10], 定理 1.2.1). 多項式環 $K[x]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定しておく. 多項式 $f, g_1, \dots, g_s \in K[x]$ に対し, $K[x]$ の多項式で $f = f_1g_1 + \dots + f_sg_s + f'$ を満たすような f_1, \dots, f_s, f' が存在して, 次の条件を満たす.

1. $f' \neq 0$ であるとき, どの $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ についても, f' の台に属する単項式は $\text{in}_<(g_i)$ で割り切れない.
2. $f_i \neq 0$ であるとき, $\text{in}_<(f) \geq \text{in}_<(f_i g_i)$ である.

Theorem 1.5 内の $f = f_1g_1 + \dots + f_sg_s + f'$ という表現を f の標準表示と言い, f' を f の g_1, \dots, g_s に関する余りと言う. これで語句の準備はできたので, 多変数の多項式の割り算アルゴリズムについて紹介する. I を $\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s)$ で生成されるイデアルであるとする.

(割り算アルゴリズム)

1. f の台に現れるどの単項式も I に属さないとき, $f_i = 0, f' = f$ とすれば標準表示を得ることができる.
2. f の台に現れるいくつかの単項式が I に属するとき, u_0 を f の台に現れる単項式のうち $<$ に関して最大の単項式とする. もし u_0 を割り切る $\text{in}_<(g_i)$ が存在するなら, それを $\text{in}_<(g_{i_0})$, そして $w_0 = u_0 / \text{in}_<(g_{i_0})$ とし, $f = c_0' c_{i_0}^{-1} w_0 g_{i_0} + h_1$ とおく. ただし, c_0' は f における u_0 の係数, c_{i_0} は g_{i_0} における $\text{in}_<(g_{i_0})$ の係数である. もし u_0 を割り切る $\text{in}_<(g_i)$ が存在しないなら, $f = h_1 + f'$ とする. ただし, $h_1 = f - c_0' u_0, f' = c_0' u_0$ である.
3. h_1 の台に現れるいくつかの単項式が I に属するとき, u_1 を h_1 の台に現れる単項式のうち $<$ に関して最大の単項式とする. もし u_1 を割り切る $\text{in}_<(g_i)$ が存在するなら, それを $\text{in}_<(g_{i_1})$, そして $w_1 = u_1 / \text{in}_<(g_{i_1})$ とし, $f = c_1' c_{i_1}^{-1} w_1 g_{i_1} + h_2$ と

おく. ただし, c'_1 は h_1 における u_1 の係数, c_{i_1} は g_{i_1} における $\text{in}_{<}(g_{i_1})$ の係数である. もし u_1 を割り切る $\text{in}_{<}(g_i)$ が存在しないなら, $f = h_2 + f'$ とする. ただし, $h_2 = h_1 - (c'_0 u_0 + c'_1 u_1)$, $f' = c'_0 u_0 + c'_1 u_1$ である.

4. これらの操作を, u_k に該当する単項式が存在しなくなるまで続ける.

Lemma 1.6 ([10], 補題 1.2.3). 多項式環 $K[x]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定し, $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ とする. また, $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$ を $K[x]$ のイデアルであるとする. このとき, \mathcal{G} が I の $<$ に関するグレブナー基底であるならば, 0 でない多項式 $f \in K[x]$ を \mathcal{G} で割った余りは一意である.

Corollary 1.7 ([10], 系 1.2.4). 多項式環 $K[x]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定し, $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$ を $K[x]$ のイデアルであるとする. また, $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\} \subset I$ は I の $<$ に関するグレブナー基底であるとする. このとき, 0 でない任意の多項式 $f \in K[x]$ が I の元であるための必要十分条件は f の g_1, \dots, g_s に関する余りが 0 となることである.

もし, f の標準表示を考えたとき, その g_1, g_2, \dots, g_s に関する余り f' が 0 と等しくなるならば f は g_1, g_2, \dots, g_s によって 0 に簡約されるという.

Definition 1.8. 多項式環 $K[x]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定し, I を $K[x]$ のイデアルであるとし, $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ を I の $<$ に関するグレブナー基底であるとする. このとき, \mathcal{G} が極小グレブナー基底であるとは, 次の 2 つの条件を満たすときに言う.

- $\{\text{in}_{<}(g_1), \dots, \text{in}_{<}(g_s)\}$ は $\text{in}_{<}(I)$ の極小な生成系である.
- 各 $\text{in}_{<}(g_i)$ ($1 \leq i \leq s$) の g_i における係数は 1 である.

また, グレブナー基底 $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ が次の 2 つの条件を満たすときには \mathcal{G} を被約グレブナー基底と言う.

- 異なる i, j に対して, g_i の台に属する単項式は $\text{in}_{<}(g_j)$ では割り切れない.
- 各 $\text{in}_{<}(g_i)$ ($1 \leq i \leq s$) の g_i における係数は 1 である.

一般に, $K[x]$ のイデアル I のグレブナー基底 $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ に 0 でない多項式 $f \in I$ を加えた集合 $\mathcal{G}' = \{g_1, g_2, \dots, g_s, f\}$ を考えても, \mathcal{G}' は I のグレブナー基底である. このように, グレブナー基底は一つに定まらず無数に存在するが, 被約グレブナー基底は一つに定まる.

Theorem 1.9 ([10], 定理 1.2.5). 多項式環 $K[x]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定し, I を $K[x]$ のイデアルであるとする. このとき, I の $<$ に関する被約グレブナー基底は一意に存在する.

1.4 ブックバーガーのアルゴリズム

単項式 $u = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, v = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \in K[\mathbf{x}]$ に対し, $c_i = \max\{a_i, b_i\}$ とする. このとき, 単項式 $x_1^{c_1} x_2^{c_2} \dots x_n^{c_n}$ を最小公倍単項式と言い, $\text{lcm}(u, v)$ で表す. 次に, $K[\mathbf{x}]$ の単項式順序 $<$ を一つ固定する. 多項式 $f, g \in K[\mathbf{x}]$ に対し, 次の式で定義される多項式 $S(f, g)$ を S 多項式と言う.

$$S(f, g) = \frac{\text{lcm}(\text{in}_<(f), \text{in}_<(g))}{c_f \cdot \text{in}_<(f)} f - \frac{\text{lcm}(\text{in}_<(f), \text{in}_<(g))}{c_g \cdot \text{in}_<(g)} g$$

ただし, c_f は f における $\text{in}_<(f)$ の係数, c_g は g における $\text{in}_<(g)$ の係数である.

Lemma 1.10 ([10], 補題 1.3.1). 多項式環 $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定する. 多項式 $f, g \in K[\mathbf{x}]$ について, $\text{in}_<(f)$ と $\text{in}_<(g)$ の間に共通な変数が存在しないとき, $S(f, g)$ は f, g によって 0 に簡約される.

Theorem 1.11 ([10], 定理 1.3.3). 多項式環 $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定し, I を $K[\mathbf{x}]$ のイデアルであるとする. また, I が $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_s\} \subset K[\mathbf{x}]$ で生成されるとする. このとき, \mathcal{G} が I の $<$ に関するグレブナー基底であるための必要十分条件は, 任意の $f, g \in \mathcal{G}$ の S 多項式 $S(f, g)$ が \mathcal{G} によって 0 へ簡約されることである.

(ブックバーガーのアルゴリズム)

多項式環 $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定し, I を $K[\mathbf{x}]$ のイデアルであるとする. また, I が $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_s\} \subset K[\mathbf{x}]$ で生成されるとする. このとき, I の $<$ に関するグレブナー基底は次のように計算できる.

1. \mathcal{G} の多項式 g_i, g_j の S 多項式が \mathcal{G} によって 0 に簡約されるか計算する. もし \mathcal{G} の全ての多項式の組の S 多項式が 0 へ簡約されるなら, アルゴリズムを終了する. このとき, \mathcal{G} が I の $<$ に関するグレブナー基底である. S 多項式が 0 へ簡約されない S 多項式がある場合, 次のステップへ進む.
2. 0 へ簡約されなかった S 多項式の \mathcal{G} に関する余りを \mathcal{G} に加え \mathcal{G}' とする. この \mathcal{G}' をステップ 1 における \mathcal{G} だと考え, もう一度 \mathcal{G}' のすべての S 多項式をステップ 1 と同様に計算する.

このアルゴリズムは有限回で終了することが知られている.

Example 1.12. 多項式環 $K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ 上の単項式順序 $<$ を, $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$ より導かれる辞書式順序で固定する. このとき, $f_1 = x_1 x_3 - x_2 x_4, f_2 =$

$x_2x_3 - x_1x_4, f_3 = x_3x_4 - x_2x_5$ で生成されるイデアル $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ のグレブナー基底を計算する. ここで, $\mathcal{G} = \{f_1, f_2, f_3\}$ としておく.

それぞれの先頭項は $\text{in}_<(f_1) = x_1x_3, \text{in}_<(f_2) = x_1x_4, \text{in}_<(f_3) = x_2x_5$ であり, 共通な変数を持つ先頭項は $\text{in}_<(f_1)$ と $\text{in}_<(f_2)$ なので, Lemma 1.10 より計算すべき S 多項式は $S(f_1, f_2)$ である. 割り算を行う単項式について下線を施すことにする.

$$S(f_1, f_2) = x_4f_1 + x_3f_2 = x_2x_3^2 - x_2x_4^2$$

より, $f_4 = x_2x_3^2 - x_2x_4^2, \mathcal{G} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ として同様に S 多項式を計算する. ここで, $\text{in}_<(f_4) = x_2x_3^2$ である. 新たに加わる計算すべき S 多項式は $S(f_1, f_4), S(f_3, f_4)$ である. 次に,

$$\begin{aligned} S(f_1, f_4) &= x_2x_3f_1 - x_1f_4 = x_1x_2x_4^2 - x_2^2x_3x_4 = x_2x_4(x_1x_4 - x_2x_3) = -x_2x_4f_2 \\ S(f_3, f_4) &= -x_3^2f_3 - x_5f_4 = \underline{x_2x_4^2x_5} - x_3^3x_4 = -x_4^2f_3 + x_3x_4^3 - x_3^3x_4 \end{aligned}$$

より, $f_5 = x_3x_4^3 - x_3^3x_4, \mathcal{G} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ として同様に S 多項式を計算する. ここで, $\text{in}_<(f_5) = x_3^3x_4$ である. 新たに加わる計算すべき S 多項式は $S(f_1, f_5), S(f_2, f_5), S(f_4, f_5)$ である. そして,

$$\begin{aligned} S(f_1, f_5) &= x_3^2x_4f_1 + x_1f_5 = x_1x_3x_4^3 - x_2x_3^2x_4^2 = x_3x_4^2(x_1x_4 - x_2x_3) = -x_3x_4^2f_2 \\ S(f_2, f_5) &= -x_3^3f_2 + x_1f_5 = \underline{x_1x_3x_4^3} - x_2x_3^4 = x_4^3f_1 + x_2x_4^4 - \underline{x_2x_3^4} \\ &= x_4^3f_1 - x_3^2f_4 - x_2x_3^2x_4^2 + x_2x_4^4 = x_4^3f_1 - x_3^2f_4 - x_4^2f_4 \\ S(f_4, f_5) &= x_3x_4f_4 + x_2f_5 = 0 \end{aligned}$$

となるので, $\mathcal{G} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ は I のグレブナー基底となる.

1.5 イニシャルイデアルと重み順序

まずはイニシャルイデアルについての命題をいくつか紹介する.

Proposition 1.13 ([10], 命題 5.2.1). 多項式環 $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定する. $K[\mathbf{x}]$ 上のイデアル I, J が $I \neq J$ かつ $I \subset J$ を満たすとき, $\text{in}_<(I) \neq \text{in}_<(J)$ かつ $\text{in}_<(I) \subset \text{in}_<(J)$ となる.

Proposition 1.14 ([10], 命題 5.2.2). 多項式環 $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<, <'$ と $K[\mathbf{x}]$ 上のイデアル I に対し,

$$\text{in}_<(I) \subset \text{in}_{<' }(I) \Rightarrow \text{in}_<(I) = \text{in}_{<' }(I)$$

が成り立つ.

負の成分を持たないベクトル $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{Q}^n$ を 1 つ固定する. $K[\mathbf{x}]$ の 0 でない多項式 f を

$$f = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} \quad (0 \neq c_i \in K)$$

とし, \mathbf{w} との内積が最大になる f の項の和 $\sum_i c_i \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i}$ を f のイニシャルフォームと言い, $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ と書く. このイニシャルフォームにより生成されるイデアル $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ を

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle \text{in}_{\mathbf{w}}(f) \mid 0 \neq f \in I \rangle$$

と定める. 一般に, 負でない成分から成る \mathbb{Q}^n 上の零でないベクトル \mathbf{w} と $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ に対し, $<_{\mathbf{w}}$ を以下のように定めると $<_{\mathbf{w}}$ は単項式順序となることが知られている.

単項式 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}, \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_n$ に対し,

- $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} > \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}^{\mathbf{a}} >_{\mathbf{w}} \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$
- $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}$ かつ $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} > \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \Rightarrow \mathbf{x}^{\mathbf{a}} >_{\mathbf{w}} \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$

この順序 $<_{\mathbf{w}}$ を重み順序と呼ぶ. さらに, $K[\mathbf{x}]$ 上のイデアル I と単項式順序 $<$ に対して, I の $<$ に関するイニシャルイデアルには, 必ず対応する重み順序が存在することが知られている.

Proposition 1.15 ([10], 命題 5.2.7). 任意の $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ と任意の $K[\mathbf{x}]$ 上のイデアル I に対して, すべての成分が負でない整数から成る \mathbb{Z}^n 上のベクトル \mathbf{w} が存在して $\text{in}_{<}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ となる.

1.6 トーリックイデアル

全ての成分が整数である $d \times n$ 行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ が配置であるとは, d 次元の実ベクトル $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ が存在して, A の列ベクトルとの内積 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c}$ が 1 と等しいときに言う. 整数ベクトル $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$ に対して, ローラン単項式を $t^{\boldsymbol{\alpha}} = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_d^{\alpha_d} \in K[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ と定め, $K[A] = K[t^{\mathbf{a}_1}, t^{\mathbf{a}_2}, \dots, t^{\mathbf{a}_n}]$ とする. この $K[A]$ をトーリック環と言う.

Definition 1.16. 多項式環 $K[\mathbf{x}]$ から配置行列 A のトーリック環 $K[A]$ への写像 π を

$$\begin{aligned} \pi : K[\mathbf{x}] &\rightarrow K[A] \\ x_i &\mapsto t^{\mathbf{a}_i} \end{aligned}$$

を満たす準同型写像とする．この写像 π の核を配置行列 A のトーリックイデアルと言い、 I_A で表す．

一般に、 I_A は配置行列 A の核に関連付けられた斉次な 2 項式から生成されることが知られている [24]．配置行列 A に対し、 $\text{Ker}_{\mathbb{Z}} A = \{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n \mid A\mathbf{b} = \mathbf{0}\}$ とする． $\text{Ker}_{\mathbb{Z}} A$ の元 $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ に対して、

$$f_{\mathbf{b}} = \prod_{b_i > 0} x_i^{b_i} - \prod_{b_j < 0} x_j^{-b_j} \in K[\mathbf{x}]$$

のように多項式を定める．

Proposition 1.17. 配置行列 A のトーリックイデアル I_A に対して $I_A = \langle f_{\mathbf{b}} \mid \mathbf{b} \in \text{Ker}_{\mathbb{Z}} A \rangle$ となる．

トーリックイデアル I_A に対して、以下の 2 条件を考える．

- (1) 多項式環 $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ が存在して、 $<$ に関する I_A のグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成る．
- (2) トーリックイデアル I_A は 2 次生成である．

一般に、(1) \Rightarrow (2) は成り立つが、その逆は成り立たない．これらの条件は、次のような動機からよく研究されている．

- 2 次式は列挙しやすく、また、構造がシンプルなため、グレブナー基底を活用した様々な不変量計算が実行しやすい．
(例えば、本研究で成功したカット多面体の h^* 多項式の計算はその典型例である．)
- 条件 (1), (2) はそれぞれ判定が難しい “Koszul” と呼ばれる条件の十分条件、必要条件となっている．
- 重要な性質が “2 次の 2 項式” で表現できる場合がある．
(例えば、マトロイドに付随するトーリックイデアルにおける交換関係など．)

固定した $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ を考え、トーリックイデアルの $<$ に関するグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成るとき、辞書式順序か逆辞書式順序でも同様のことがいえる場合が多い．これに関して日比孝之は以下のような予想を提唱した．

Conjecture 1.18. あるトーリックイデアル I_A に対し、 $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ に関する I_A のグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成るとする．このとき、ある辞書式順序あるいは逆辞書式順序に関する I_A のグレブナー基底も 2 次の 2 項式から成る．

この予想を否定する例を後に定義するカットイデアルと呼ばれるトーリックイデアルの

特殊なクラスにおいて発見したので第 5 章で紹介する。

1.7 トーリックイデアルと消去理論

多項式 $f \in K[\mathbf{x}]$ のうち、変数として $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ のみを持つものを考え、そのような多項式を全て集めた集合を $B_{i_1 i_2 \dots i_m}$ と表すことにする。明らかに $B_{i_1 i_2 \dots i_m} \subset K[\mathbf{x}]$ である。多項式環 $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定する。多項式環 $B_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 上の単項式順序 $<'$ を、 $B_{i_1 i_2 \dots i_m}$ の単項式 u, v が $K[\mathbf{x}]$ の単項式として $u < v$ であるときに $u <' v$ とする。このとき、次の命題が成り立つ。

Theorem 1.19 (消去定理). 多項式環 $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ を一つ固定する。また、 I を (0) でない $K[\mathbf{x}]$ のイデアルであるとし、 \mathcal{G} を単項式順序 $<$ に関する I のグレブナー基底であるとする。このとき、

$$g \in \mathcal{G}, \text{in}_<(g) \in B_{i_1 i_2 \dots i_m} \Rightarrow g \in B_{i_1 i_2 \dots i_m}$$

という条件をみたすなら、 $\mathcal{G} \cap B_{i_1 i_2 \dots i_m}$ は $I \cap B_{i_1 i_2 \dots i_m}$ の $<$ に関するグレブナー基底である。

また、 $1 \leq p < n$ なる p に対して、 $B_{\geq p}$ を $K[\mathbf{x}]$ の多項式で変数として x_p, x_{p+1}, \dots, x_n のみを持つもの全ての集合とする。このとき、消去定理から次が成り立つ。

Lemma 1.20 ([10], 系 1.4.2). 多項式環 $K[\mathbf{x}]$ 上の辞書式順序 $<$ を一つ固定する。また、 I を (0) でない $K[\mathbf{x}]$ のイデアルであるとし、 \mathcal{G} を $<$ に関する I のグレブナー基底であるとする。このとき、 $\mathcal{G} \cap B_{\geq p}$ は $I \cap B_{\geq p}$ の $<$ に関するグレブナー基底である。

負でない整数を成分とする $d \times n$ 配置行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ と、多項式環 $K[\mathbf{x}]$ に新たな変数 t_1, t_2, \dots, t_d を加えた多項式環 $K[\mathbf{x}, \mathbf{t}]$ を考える。このとき、

$$J_A = \langle x_1 - t^{a_1}, x_2 - t^{a_2}, \dots, x_n - t^{a_n} \rangle$$

は $K[\mathbf{x}, \mathbf{t}]$ のイデアルである。この表記の下、Lemma 1.20 を利用して、配置行列 A からトーリックイデアルを計算する方法を紹介する。

Lemma 1.21 ([10], 補題 1.5.11). 負の成分を持たない $d \times n$ 配置行列 A のトーリックイデアル I_A に対して、次が成り立つ。

$$I_A = J_A \cap K[\mathbf{x}]$$

第 2 章

凸多面体とその三角形分割

この章では、文献 [10] の第 5 章に基づき、凸多面体やその三角形分割について紹介する。最初に、2.1 節で凸多面体の定義と関連する語句などの定義を行い、2.2 節で凸多面体の三角形分割の定義を行う。そして、2.3 節ではイニシャル複体の定義を行う。イニシャル複体は正則三角形分割であることや、トーリックイデアルと三角形分割の関係を紹介する。正則三角形分割が単模であるための必要十分条件に付いても言及する。最後に、2.4 節では凸多面体の内部に含まれる格子点の数と関わりの深い Ehrhart 多項式と、Hilbert 級数との関わりがある h^* 多項式の関係について紹介する。単模な三角形分割を持つとき、 h^* 多項式が h 多項式で表現できること、トーリックイデアルがスクエアフリーなイニシャルイデアルを持つとき、標準単項式の数直接数えることにより h^* 多項式を計算できることなどを紹介する。

2.1 凸多面体

集合 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{Q}^d$ に対し、

$$\text{conv}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m r_i \alpha_i \mid 0 \leq r_i \in \mathbb{Q}, \sum_{i=1}^m r_i = 1 \right\}$$

とする。有限集合 \mathcal{P} に対し、 $\mathcal{P} = \text{conv}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ となるような $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ が存在するとき、 \mathcal{P} を凸多面体という。(凸多面体は有限個の閉半空間の有界な共通部分としても定義される。)

Definition 2.1. 凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{Q}^d$ とベクトル $w \in \mathbb{Q}^d$ に対し

$$\{u \in \mathcal{P} \mid \forall v \in \mathcal{P}, w \cdot u \geq w \cdot v\}$$

を \mathcal{P} の面と言い、 $\text{FACE}_w(\mathcal{P})$ とかく。

面として \mathcal{P} の元 1 つのみの集合が取れるとき、その点を \mathcal{P} の頂点といい、 \mathbb{Q}^d 上の凸多面体 \mathcal{P} の次元 $\dim \mathcal{P}$ を、 \mathcal{P} 上の点 α を固定した時に $\{x - \alpha \mid x \in \mathcal{P}\}$ が張る空間の次元とする。また、次元が $\dim \mathcal{P} - 1$ となるような面を \mathcal{P} のファセットという。凸多面体 \mathcal{P} がちょうど $\dim \mathcal{P} + 1$ 個の頂点を持つとき、 \mathcal{P} を単体と呼ぶ。単体から成る集合 Δ が次の条件を満たすとき、その集合を単体的複体と言う。

- (i) 任意の $F \in \Delta$ の面 F' は Δ の元である。
- (ii) 任意の $F, F' \in \Delta$ の共通部分 $F \cap F'$ は F の面でも F' の面でもある。

また、頂点が格子点であるような凸多面体 \mathcal{P} は 整凸多面体とも呼ばれる。

Example 2.2. 次の凸多面体を考える。この多面体 \mathcal{P} は 3 次元の凸多面体であり、1 次

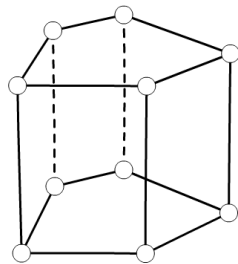


図 2.1 多面体の例 \mathcal{P}

元の面 (頂点) を 10 個、1 次元の面 (辺) を 15 個、2 次元の面を 7 個持つ。もちろん \mathcal{P} 自体も \mathcal{P} の 3 次元の面である。

2.2 凸多面体の三角形分割

配置行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ を集合 $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ とみなして考える。

Definition 2.3. 単体から成る集合 Δ の各元の頂点が配置行列 A の元の中にあるとする。このとき、

$$\text{conv}(A) = \bigcup_{F \in \Delta} F$$

となるならば Δ を配置行列 A の被覆と呼ぶ。さらに、配置行列 A の被覆 Δ が単体的複体であるならば、 Δ を配置行列 A の三角形分割という。

配置行列 A の被覆 Δ の元で極大な単体 $\sigma \in \Delta$ の頂点の集合を B とおく ($B \subset \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$)。 $d \times n$ 配置行列 A のランクが d であるとし、 A のすべての $d \times d$ の小行列式の最大公約数を δ とおく。このとき、 $V(\sigma) = \frac{|\det B|}{\delta}$ を σ の正規化体積という。

全ての極大単体の正規化体積が 1 であるような三角形分割 Δ を, 単模三角形分割という. 次に, n 次元ベクトル $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{Q}^n$ に対し, 集合 $\Delta_{\mathbf{w}}$ を次のように定める.

$$\Delta_{\mathbf{w}} = \left\{ \text{conv}(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}) \mid \exists \mathbf{c} \in \mathbb{Q}^d \text{ s.t. } \begin{cases} \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = w_j & j \in \{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\} \\ \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} < w_j & j \notin \{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\} \end{cases} \right\}$$

ベクトル \mathbf{w} が一般の位置にあれば, $\Delta_{\mathbf{w}}$ は配置行列 A の三角形分割となることが知られている. 配置行列 A の三角形分割 Δ に対し, $\mathbf{w} \in \mathbb{Q}^d$ が存在して $\Delta = \Delta_{\mathbf{w}}$ となるとき, Δ を配置行列 A の正則三角形分割と呼ぶ. 正則三角形分割 $\Delta_{\mathbf{w}}$ は, 配置行列 A を \mathbf{w} で 1 次元持ち上げた \tilde{A} に対し $\text{conv}(\tilde{A})$ を考え, その下側の境界の面の集合に対応している.

2.3 イニシャル複体

配置行列 $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ に対して, 正則三角形分割を与えることができる.

Definition 2.4. 配置行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ と $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ に対して, 次の集合 $\Delta(\text{in}_{<}(I_A))$ をイニシャル複体という.

$$\Delta(\text{in}_{<}(I_A)) = \left\{ \text{conv}(B) \mid B \subset A, \prod_{\mathbf{a}_i \in B} x_i \notin \sqrt{\text{in}_{<}(I_A)} \right\}$$

Proposition 2.5 ([10], 定理 5.5.6). 配置行列 $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ と固定された $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ を考える. このとき, $\mathbf{w} \in \mathbb{Q}^d$ が存在して $\text{in}_{<}(I_A) = \text{in}_{\mathbf{w}}(I_A)$ が成り立つならば $\Delta(\text{in}_{<}(I_A)) = \Delta_{\mathbf{w}}$ が成り立つ.

Corollary 2.6 ([10], 系 5.5.7). 配置行列 $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ と \mathbb{Q}^n 上のベクトル \mathbf{w} に対し, $\text{in}_{\mathbf{w}}(I_A)$ の生成系が単項式より成るなら, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \sqrt{\text{in}_{<}(I_A)} &= \langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \mid \text{conv}(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}) \notin \Delta_{\mathbf{w}} \rangle \\ &= \bigcap_{\sigma \in \Delta_{\mathbf{w}}} \langle x_i \mid \mathbf{a}_i \text{ は } \sigma \text{ の頂点ではない} \rangle \end{aligned}$$

Example 2.7. 次の配置行列 A を考える.

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

この配置行列のトーリックイデアルは $I_A = \langle x_1 x_5^2 - x_2 x_3 x_4 \rangle$ で与えられる. ここで, $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$ より導かれる $K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ 上の辞書式順序 $<$ を考える

と、 $<$ に関する I_A のイニシャルイデアルとその根基は

$$\text{in}_{<}(I_A) = \langle x_1 x_5^2 \rangle, \sqrt{\text{in}_{<}(I_A)} = \langle x_1 x_5 \rangle$$

となる。したがってこの順序 $<$ に関する A のイニシャル複体は

$$\begin{aligned} \Delta(\text{in}_{<}(I_A)) = & \{ \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_5\}, \\ & \text{conv}(a_1, a_2), \text{conv}(a_1, a_3), \text{conv}(a_1, a_4), \text{conv}(a_2, a_3), \\ & \text{conv}(a_2, a_4), \text{conv}(a_3, a_4), \text{conv}(a_2, a_5), \text{conv}(a_3, a_5), \\ & \text{conv}(a_4, a_5), \text{conv}(a_1, a_2, a_3), \text{conv}(a_1, a_2, a_4), \text{conv}(a_1, a_3, a_4), \\ & \text{conv}(a_2, a_3, a_4), \text{conv}(a_2, a_3, a_5), \text{conv}(a_2, a_4, a_5), \\ & \text{conv}(a_3, a_4, a_5), \text{conv}(a_1, a_2, a_3, a_4), \text{conv}(a_2, a_3, a_4, a_5) \} \end{aligned}$$

となる。

単模な三角形分割となる条件もイニシャル複体を考えることで与えられる。

Proposition 2.8 ([10], 定理 5.5.8). 配置行列 $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ と固定された $K[x]$ 上の単項式順序 $<$ を考える。このとき、次の 2 条件は同値である。

- (i) 正則三角形分割 $\Delta(\text{in}_{<}(I_A))$ が単模である。
- (ii) $\sqrt{\text{in}_{<}(I_A)} = \text{in}_{<}(I_A)$ である。

Example 2.9. 配置行列 A として Example 2.7 の配置行列を考える。Example 2.7 と同じ辞書式順序を考えたとき $\text{in}_{<}(I_A) \neq \sqrt{\text{in}_{<}(I_A)}$ なので、 $\Delta(\text{in}_{<}(I_A))$ は単模ではない。次に、 $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$ より導かれる $K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ 上の逆辞書式順序 $<'$ を考えると、 $<'$ に関する I_A のイニシャルイデアルとその根基は

$$\text{in}_{<' }(I_A) = \langle x_2 x_3 x_4 \rangle, \sqrt{\text{in}_{<' }(I_A)} = \langle x_2 x_3 x_4 \rangle$$

となる。したがってこの逆辞書式順序 $<'$ に関する A のイニシャル複体 $\Delta(\text{in}_{<' }(I_A))$ は単模となる。

2.4 Ehrhart 多項式と h^* 多項式

多面体の理論における Ehrhart 多項式と、Hilbert 級数などの関係について紹介する。 \mathbb{Q}^d 上の d 次元整凸多面体 $\mathcal{P} = \text{conv}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ で $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ となるものを考える。このとき、

$$A_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

Definition 2.10. 次元が d である整凸多面体 $\mathcal{P} = \text{conv}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \subset \mathbb{Q}^d$ で $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ となるものを考える. このとき, 正規化 Ehrhart 多項式 $i(\mathcal{P}, m)$ は次の式で与えられる.

$$i(\mathcal{P}, m) = |m\mathcal{P}^* \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}|$$

ただし $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}^* = \text{conv}(\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n \\ 1 \end{pmatrix})$, $m\mathcal{P}^* = \{m\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{P}^*\}$,

$$\mathbb{Z}\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

である.

一般的に, $i(\mathcal{P}, m)$ は次の条件を満たしている [6].

- $i(\mathcal{P}, m)$ は d 次の多項式
- $i(\mathcal{P}, 0) = 1$

また, 格子 $\mathbb{Z}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ における \mathcal{P} の h^* 多項式 $h^*(\mathcal{P}, x)$ を次の式で定義する.

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} i(\mathcal{P}, m)x^m = \frac{h^*(\mathcal{P}, x)}{(1-x)^{d+1}}$$

一般的に h^* 多項式に関して次のような事実がわかっている.

- $h^*(\mathcal{P}, x) = \sum_{i=0}^d h_i^* x^i$ ただし各 h_i^* は負でない整数 [21]
- $i(\mathcal{P}, m) = \sum_{i=0}^d h_i^* \binom{m+d-i}{d}$
- $h_d^* > 0$ のとき, $h_i^* \geq h_1^*$ ($1 \leq i \leq d-1$) [9]

整凸多面体 \mathcal{P} の三角形分割 Δ に対し, Δ の f 多項式 $f_{\Delta}(x) = \sum_{i=0}^{d+1} f_{i-1} x^i$ の各係数 f_i は \mathcal{P} の i 次元の面の数を示している. ($i = 0, \dots, d, f_{-1} = 1$) Δ の h 多項式 $h_{\Delta}(x) = \sum_{i=0}^{d+1} h_i x^i$ は f 多項式を用いて次のように定義される [1, P.185].

$$h_{\Delta}(x) = \sum_{i=0}^{d+1} f_{i-1} x^i (1-x)^{d+1-i}$$

整凸多面体 \mathcal{P} の h^* 多項式と \mathcal{P} の三角形分割 Δ の h 多項式について次のような関係があることが知られている [1, Theorem 10.3].

Proposition 2.11. 整凸多面体 \mathcal{P} が単模な三角形分割 Δ を持つとする. このとき, \mathcal{P} の h^* 多項式と Δ の h 多項式について次が成り立つ.

$$h^*(\mathcal{P}, x) = h_{\Delta}(x)$$

もし、配置行列 A のトーリックイデアル I_A に対して、 $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ が存在して、 I_A の $<$ に関するイニシャルイデアルがスクエアフリーとなるならば、Proposition 2.8 から $\Delta(\text{in}_{<}(I_A))$ が単模であることが言える。すると、単模な三角形分割が存在するので、Proposition 2.11 から、 $\text{conv}(A)$ の h^* 多項式と $\Delta(\text{in}_{<}(I_A))$ の h 多項式が一致する。そして、 h 多項式は f 多項式を用いて表示できる。 f 多項式の各係数 f_i は $\Delta(\text{in}_{<}(I_A))$ の i 次元の面の数と一致しており、これはスクエアフリーな標準単項式の数と一致している。ゆえに、スクエアフリーな $i+1$ 次の標準単項式の数直接数えることによって h^* 多項式を決定することができる。

第 3 章

マルコフ基底とグレブナー基底

この章では文献 [10] の第 4 章に基づき、統計学でよく見られる分割表を使った検定問題などに対して有効なマルコフ基底を紹介し、グレブナー基底との関係を見る。まず、3.1 節では分割表の紹介をする。分割表で考えたいことやその検定の方法について言及する。次に、3.2 節ではマルコフ基底を定義する。このマルコフ基底は分割表の検定問題に利用される。最後に、3.3 節でマルコフ基底とトーリックイデアルの関係について紹介する。分割表から配置行列が決まることや、マルコフ基底から作られる 2 項式のイデアルがトーリックイデアルと一致することを紹介する。第 1 章で紹介した消去定理を利用すれば、グレブナー基底を計算できることからマルコフ基底を決定できる。

3.1 分割表

平均や共分散など、統計学に関する手続きを経て得られる数値等を統計量と呼ぶ。また、統計量は何らかの関数の形で得られることが多く、その変数を母数と呼ぶ。統計量に関する推定等を行う場合、興味のある変数とそうでない変数がある。興味のない変数を局外母数と呼ぶ。

Definition 3.1. 母数が θ である確率変数 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r)$ に対し、統計量 $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ を考える。具体的な統計量 \mathbf{T} を与えたとき、条件付き確率

$$p(\mathbf{X} = \mathbf{x} \mid \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{t})$$

が母数 θ によらないとき、 $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ を母数 θ の十分統計量と呼ぶ。

2 つ以上の変数の間の関係を数量などで示し、表の形にまとめたものを分割表と呼ぶ。例えば、数科目のテストの点数をまとめたものなどが該当する。

Example 3.2. 表 3.1 のような分割表が得られたとする。ただし、数字は架空の物で

ある.

	代数/解析	60 点未満の人数	60 点以上の人数
$x^o =$	60 点未満の人数	12	20
	60 点以上の人数	18	15

表 3.1 代数と解析の点数の分布

この例は 2 つの科目の得点が 60 点以上か未満の 2 つの要素から成るので、 2×2 分割表と呼ばれる. こういった分割表で調べたいことは「変数同士が関連するかどうか」である. 上記の例でいえば、「代数学の得点と解析学の得点は関連性があるか」である. 得られたこの表から結論として 2 つの変数が関連していることが言えれば良いが, この表がたまたまこの結果になっただけで, 本当は関係ない事象かもしれない. こういった, 偶然の結果なのかどうかは統計的仮説検定の考え方で判断する. 多くの場合, この 2 つの変数には関係がない, と仮定して考えていく. このような仮定は帰無仮説と呼ばれる. 変数が 2 つ以上だとしても同様である. ここで, Example 3.2 の分割表について, 帰無仮説を適用して, 「代数の点数と解析の点数は独立である」と仮定する. それぞれの当てはめ値 (期待値) は表 3.2 のようになる. 例えば, 最初のセルの当てはめ値は $65 \times \frac{32}{65} \times \frac{30}{65} = 14.77$ で

代数/解析	60 点未満の人数	60 点以上の人数	計
60 点未満の人数	14.77	17.23	32
60 点以上の人数	15.23	17.77	33
計	30	35	65

表 3.2 表 3.1 のデータの当てはめ値

ある. この値を元に適合度カイ 2 乗検定統計量を計算すると

$$\chi^2(x^o) = \frac{(12 - 14.77)^2}{14.77} + \frac{(20 - 17.23)^2}{17.23} + \frac{(18 - 15.23)^2}{15.23} + \frac{(15 - 17.77)^2}{17.77} = 1.90$$

となる. 一般に, この適合度カイ 2 乗検定統計量は, 帰無仮説の下でカイ 2 乗分布に漸近的に従うことが知られている [10]. データによっては, 検定統計量の漸近分布を利用することが適切でない場合があり, その場合, 有意確率 (p 値) を求めたいが, 標本のサイズや分割表の都合などにより直接計算することが困難な場合がある. その場合に取られるのがモンテカルロ法であり, 特にマルコフ連鎖を用いたモンテカルロ法が強力であることが知られている.

3.2 マルコフ基底

分割表に現れる数値の列を \mathbf{x} とおく．局外母数に関する十分統計量 \mathbf{t} を行列 A を用いて $\mathbf{t} = A\mathbf{x}$ と表し，固定しておく．ここで，行列 A は配置行列であると仮定する．固定した十分統計量 \mathbf{t} が具体的に与えられたとき，その統計量が等しいものを \mathbf{t} -ファイバーと呼び，

$$\mathcal{F}_{\mathbf{t}} = \{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{t}\}$$

と書く．このとき，有意確率 (p 値) は次の式で定義される．

$$p = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{\mathbf{t}} \\ \chi^2(\mathbf{x}) \geq \chi^2(\mathbf{x}^o)}} h(\mathbf{x})$$

ただし， $h(\mathbf{x})$ は指定された分布と帰無仮説のもと， \mathbf{x} が生じる確率である．ここで， $d \times k$ 配置行列 A の核 $\text{Ker}_{\mathbb{Z}}(A)$ を考えると， $\text{Ker}_{\mathbb{Z}}(A) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^k \mid A\mathbf{z} = \mathbf{0}\}$ だったので，十分統計量が $\mathbf{0}$ となる整数ベクトルの集合となる．簡単に $\mathcal{M}(A) = \text{Ker}_{\mathbb{Z}}(A)$ と書き， $\mathcal{M}(A)$ の各元を **move** と呼ぶ．また， $\mathcal{F}_{\mathbf{t}}$ の元 \mathbf{x}, \mathbf{y} が $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}(A)$ によって相互到達可能であるとは，

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{j=1}^N \varepsilon_j \mathbf{z}_j, \quad \mathbf{x} + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \mathbf{z}_j \in \mathcal{F}_{\mathbf{t}}, \quad n = 1, \dots, N$$

が成り立つような $N > 0, \mathbf{z}_j \in \mathcal{B}, \varepsilon_j \in \{-1, 1\}, j = 1, \dots, N$ が存在するときに言う．相互到達可能性は $\mathcal{F}_{\mathbf{t}}$ の同値関係となることがわかっている．この同値類を $\mathcal{F}_{\mathbf{t}}$ の \mathcal{B} -同値類と呼ぶ．

Definition 3.3. **move** の有限集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}(A)$ が A のマルコフ基底であるとは，任意の \mathbf{t} に対して $\mathcal{F}_{\mathbf{t}}$ 自身が \mathcal{B} -同値類となるときに言う．

このマルコフ基底を使って有意確率を計算するアルゴリズムを作ることができる [10]．このアルゴリズムではランダムウォークの考え方を採用しているが，その際，「どの状態にどの確率で移るのか」をそれぞれ決定しなければならない．ここで用いられるのがマルコフ連鎖であり，そのマルコフ連鎖を構築するために Metropolis-Hastings 法というアルゴリズムも利用している．アルゴリズムは次のようになっている．

入力：観測値 \mathbf{x}^o ，マルコフ基底 \mathcal{B} ，総ステップ数 N ，配置行列 A ，帰無分布 $f(\mathbf{x})$ ，検定統計量 $T(\mathbf{x})$

出力：有意確率 (p 値) の推定値

(1) obs = $T(\mathbf{x}^o)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^o$, count = 0, sig = 0

- (2) ランダムに $z \in \mathcal{B}$ を選び, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ を等確率で選ぶ.
- (3) $x + \varepsilon z \in \mathcal{F}_t$ であれば, u を 0 と 1 の間の一様乱数であるとし, そうでなければ $x_{\text{next}} = x$ として, (5) へ移る.
- (4) $u \leq \frac{f(x + \varepsilon z)}{f(x)}$ であれば, $x_{\text{next}} = x + \varepsilon z$ とする. そうでなければ, $x_{\text{next}} = x$ とする.
- (5) $T(x_{\text{next}}) \geq \text{obs}$ であれば $\text{sig} = \text{sig} + 1$ とする.
- (6) $x = x_{\text{next}}, \text{count} = \text{count} + 1$ とする.
- (7) $\text{count} < N$ であれば (2) へ移る.
- (8) 有意確率 (p 値) の推定値として $\frac{\text{sig}}{N}$ を出力する.

この方法では, 初期のステップにおいては最初に選んだ点 x^o の影響を大きく受けていることが多い. したがって, 最初の数百ステップについては棄却し, それ以降についてアルゴリズムを適用していく.

3.3 マルコフ基底とトーリックイデアル

分割表の各数値を単項式に対応させることを考える. 例えば, 次のような分割表 T が得られたとする.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 5 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 8 & 9 & 7 \\ \hline \end{array}$$

このとき, T を単項式 $u_1^6 u_2^5 u_3^4 u_4^2 u_5^3 u_6^8 u_7^9 u_8^3$ と対応させる. 配置行列 A の move について同様のことを考えると, move の要素には負の整数が含まれている場合がある. そこで, move の正の要素と負の要素に分けて差の形で多項式として書くことにする. すなわち, move を $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$ としたとき,

$$f_{\mathbf{m}} = \prod_{m_i > 0} u_i^{m_i} - \prod_{m_j < 0} u_j^{-m_j}$$

と定めるということである. 例えば, \mathbf{m} が表 3.3 のような move であるとする. このと

$$\mathbf{m} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

表 3.3 move の例

き, $f_{\mathbf{m}} = u_1 u_3 u_5 u_8 - u_2^2 u_6 u_7$ と対応する. この対応自体は move でなくとも考えることができるが, 配置行列 A の move 全体に対してこの対応を考え, それらの多項式で生成されるイデアルを考えると, これは配置行列 A のトーリックイデアルと一致している. 配置行列 A の move が A のトーリックイデアルの元と対応するが, この move がマルコフ基底と対応することが次の命題により知られている.

Proposition 3.4 ([5], Theorem 3.1). 配置行列 A の move の集合 $\mathcal{M}(A)$ の部分集合 $\mathcal{B} = \{z_1, \dots, z_r\}$ が A に対するマルコフ基底であることと, $\{f_{z_1}, \dots, f_{z_r}\}$ が I_A の生成系であることは同値である.

この命題によって, I_A の生成系を計算できればマルコフ基底も計算できることになる. 第 1 章で紹介した消去定理を使えば, I_A の生成系としてグレブナー基底を計算できるので, マルコフ基底を具体的に計算できる.

第 4 章

カットイデアル

この章では，グラフに付随するカットイデアルを定義し，カットイデアルの様々な結果について紹介する．まず，4.1 節では，グラフの定義と，のちに登場するグラフの用語について図を交えながら準備する．次の 4.2 節では，グラフの頂点の分割より導かれる代数系であるカットイデアルを定義し，同様に定義される凸多面体であるカット多面体についても紹介する．そして，4.3 節ではカットイデアルやカット多面体の既存の結果について紹介する．具体的には，カットイデアルの生成系についての定理や 2 次グレブナー基底に関する定理，カット多面体が正規であることの予想などを紹介する．最後に，4.4 節では，カットイデアルと binary graph model という統計モデルのトーリックイデアルと対応することを紹介する．この結果によりカットイデアルが統計学に有用であることが示唆された [25]．

4.1 グラフにまつわる諸定義

カットイデアルは様々なグラフより導かれるが，その定義の前にグラフの言葉を準備する．空でない集合 A の l 個の元から成る部分集合族を $[A]^l$ と表す．

Definition 4.1. 集合の組 $G = (V, E)$ が $E \subset [V]^2$ を満たすとき， G をグラフであると言う．また， V を頂点集合と言い， E を辺集合と言う．

頂点集合 V の元を頂点と言い，辺集合 E の元を辺と言う．とくに E の元は V の元 2 個から成る集合であることに注意する．頂点の数 $|V|$ が有限であるとき，グラフ G は有限グラフであると言い，任意の 2 つの頂点に対し，一方の頂点から辺をたどってもう一方の頂点に到達できるとき G を連結グラフと言う．グラフ G が重複する辺やほかのどの頂点も経由せず自分に戻ってくる辺であるループを持たないとき，グラフ G を単純グラフと言う．単純グラフ G が m 個の頂点を持つとき， G は最大で $\frac{m^2-m}{2}$ 本の辺を持つ．単純

グラフ G が m 個の頂点を持ち、 $\frac{m^2-m}{2}$ 本の辺を持つとき、 G を完全グラフと言い、 K_m で表す。また、辺 e_i が頂点 j, k をつなぐ辺である場合、それを明示して $e_i = \{j, k\}$ と書く。以下、グラフ G は単純グラフであるとし、 $V = \{1, 2, \dots, n\}, E = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ とする。

Definition 4.2. グラフ G の辺集合を $E = \{\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\}, \dots, \{i_{2m-1}, i_{2m}\}\}$ とする。このとき、グラフ G が長さ m のサイクルであるとは、次の条件を満たすときに言う。

1. $m \geq 3$
2. $i_{2j} = i_{2j+1}$ ($1 \leq j \leq m-1$)
3. $i_{2k} \neq i_{2l}$ ($k, l \in \mathbb{N}, 1 \leq k < l \leq m$)
4. $i_1 = i_{2m}$

長さ m のサイクルを \mathcal{C}_m で表す。

グラフ G が連結でありサイクルを持たない場合、 G は木と呼ばれる。

Definition 4.3. グラフ G の頂点集合 V に対し、 $V_1 \cup V_2 = V$ かつ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ となる $V_1, V_2 \subset V$ を考える。このとき、同じ頂点集合に属する頂点どうしの間には辺がなく、互いに異なる頂点集合に属するいくつかの頂点どうしの間には辺があるとき G を二部グラフといい、異なる集合に属する頂点どうしには必ず辺があるとき完全二部グラフと言う。 G が完全二部グラフであるとき、 $|V_1| = m, |V_2| = n$ であるならば G を $K_{m,n}$ と書く。

Definition 4.4. 頂点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ と辺集合 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ を持つグラフ G に対し、 V に新たに頂点 $n+1$ を加えた集合 V' と、 E に新たな辺 $e_{r+1} = \{1, n+1\}, e_{r+2} = \{2, n+1\}, \dots, e_{r+n} = \{n, n+1\}$ を加えた集合 E' を持つグラフ \hat{G} を G のサスペンションと言う。図 4.1 のグラフは長さ 4 のサイクルのサスペンションである。

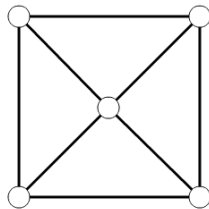


図 4.1 サスペンションの例

Definition 4.5. グラフ G が n 個の頂点を持ち、 r 本の辺を持つとする。次の操作をマ

イナー操作と言う．

- 頂点を一つ選び，その頂点自身とその頂点につながっていた辺を除去する．
- 辺を一つ選び，その辺を除去する．
- 辺を一つ選び，その辺を縮約する．

辺の縮約とは，ある辺を縮めていって，その辺がつながっている頂点どうしを重ね合わせ完全に同一視する操作である．グラフ G に，上記のマイナー操作を繰り返したり組み合わせたりして得られた新たなグラフ H を G のマイナーと呼ぶ．グラフ G の頂点をいくつか抜き出し，その抜き出した頂点をつなげていた辺もいくつか抜き出したグラフを部分グラフと言ひ，抜き出した頂点をつなげていた辺をすべて抜き出したグラフを誘導部分グラフと言う．グラフ G が誘導部分グラフとして長さ 4 以上のサイクルを持たないとき， G はコードルであると言う．また，連結グラフ G のある辺を 1 本取り除いたとき，互いに連結でない 2 つの連結なグラフに分けてしまうなら，その辺を橋と呼ぶ．グラフ G がマイナーとして完全グラフ K_5 と完全二部グラフ $K_{3,3}$ のどちらも持たないとき， G を平面グラフと言う． K_5 や $K_{3,3}$ は平面に描いたとき，必ず交差する辺がある．逆に，辺を交差させずに平面に描けるグラフは K_5 と $K_{3,3}$ のどちらもマイナーに持たないことからこのように呼ばれる．また，グラフ G が誘導部分グラフとして m 頂点の完全グラフを持つとき，その完全グラフを大きさ m のクリークとも言う．グラフ G_1 はコードルグラフの

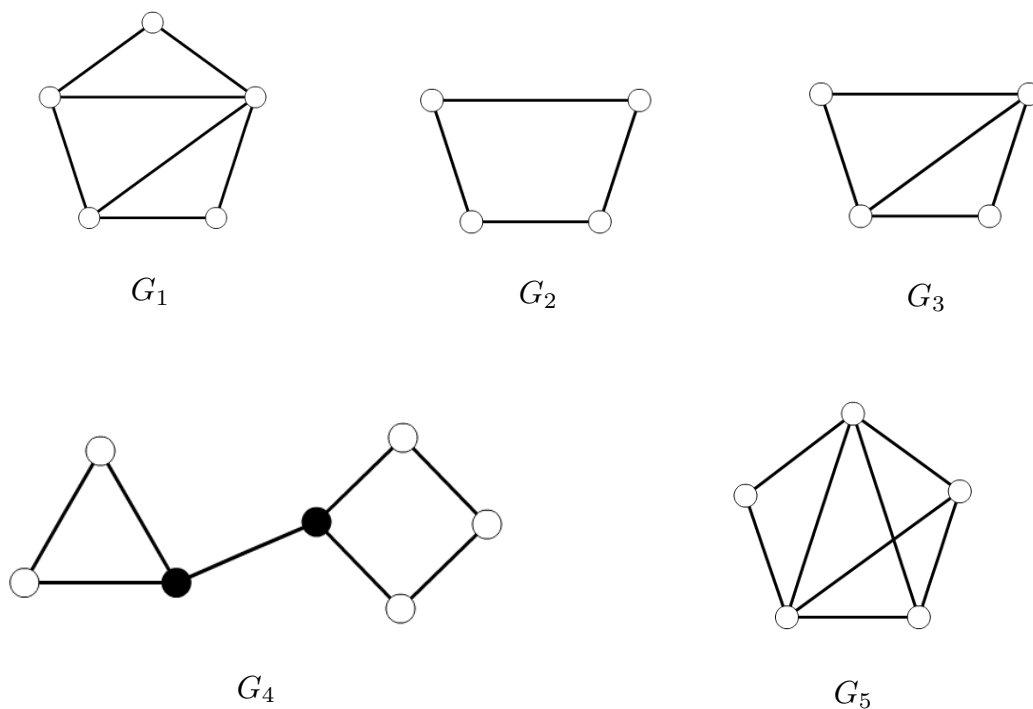


図 4.2 コードル・部分グラフ・誘導部分グラフ・橋・クリークの例

例であり, G_2 は G_1 の部分グラフ, G_3 は G_1 の誘導部分グラフである. グラフ G_4 の黒く塗られた頂点の間の辺は橋であり, グラフ G_5 は大きさ 4 のクリークを持っている.

Definition 4.6. グラフ G, H の頂点集合を V_1, V_2 とし, 辺集合を E_1, E_2 とする.

また, G, H それぞれの頂点集合の共通部分 $V_1 \cap V_2$, 辺集合の共通部分 $E_1 \cap E_2$ を持つグラフ $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ が大きさ l のクリークであるとする. このとき, 新たな頂点集合 $V_1 \cup V_2$ と $E_1 \cup E_2$ を持つグラフ G' を考える. このグラフ G' を G と H のクリークサムと言う [25]. 共通部分として大きさ l のクリークのみを持つグラフどうしのクリークサムは $l-1$ サムとも呼ばれる. 次のグラフ G_6, G_7 はそれぞれ大きさ 3 のクリークを一つ持つ. そのクリークでの G_6 と G_7 のクリークサムが G_8 である.

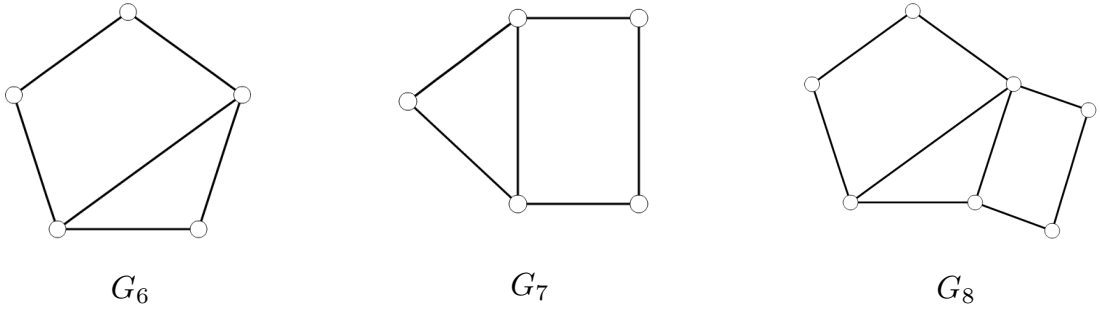


図 4.3 2 サムの例

4.2 カットイデアル

グラフ G が連結であり, 頂点集合 $V = \{1, 2, \dots, m\}$ と辺集合 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ を持つとする. ここで, 次のような $A, B \subset V$ について考える.

$$A \cap B = \emptyset, A \cup B = V$$

この条件を満たす A, B を V の分割と言い, $A|B$ と表す. ある V の分割 $A|B$ に対して $\delta_{A|B} = (d_1, d_2, \dots, d_r) \in \{0, 1\}^r$ の各成分を次のように定める.

$$d_i = \begin{cases} 1 & |A \cap e_i| = 1 \ (e_i = \{j, k\}) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

このとき, 次の配置行列を考える.

$$A_G = \begin{pmatrix} \delta_{A_1|B_1} & \delta_{A_2|B_2} & \cdots & \delta_{A_N|B_N} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ただし, $\{\delta_{A|B} \mid A, B \subset V, A \cap B = \emptyset, A \cup B = V\} = \{\delta_{A_1|B_1}, \delta_{A_2|B_2}, \dots, \delta_{A_N|B_N}\}$ かつ $N = 2^{m-1}$ である. この配置行列 A_G のトーリックイデアル I_A をグラフ G のカットイデアルと言い, I_G で表す. 次に, 多項式環 $K[\mathbf{q}]$ を

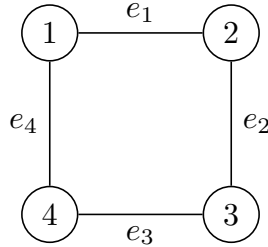
$$K[\mathbf{q}] = K[q_{A_1|B_1}, \dots, q_{A_N|B_N}]$$

で定める. ただし, $A_i \cap B_i = \emptyset, A_i \cup B_i = V(G), 1 \leq i \leq N$ である. カットイデアルの配置行列の各列は上記の条件を満たす A_i, B_i の取り方によって一意的に定まるので, カットイデアルの各変数と $A_i|B_i$ が 1 対 1 で対応する. $q_{A_i|B_i}$ はグラフ G の頂点集合 V の分割 $A_i|B_i$ に対応する変数ということである. また, $\text{Cut}(G) = \text{conv}(\delta_{A_1|B_1}, \dots, \delta_{A_N|B_N})$ をカット多面体と言う. カット多面体は整凸多面体である. カット多面体 $\text{Cut}(G)$ が正規であるとは,

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}A_G = \mathbb{Z}A_G \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}A_G$$

が成り立つときに言う. この定義は代数的な正規の定義と対応しており, $K[\mathbf{x}]/I_G$ が整閉であることと同値であることがわかっている.

Example 4.7. グラフ G を長さ 4 のサイクルであるとする.



この場合, $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{e_1 = \{1, 2\}, e_2 = \{2, 3\}, e_3 = \{3, 4\}, e_4 = \{1, 4\}\}$ である. V の分割 $A|B = \{1, 2\}|\{3, 4\}$ に対し, $\delta_{A|B} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ を計算する. $|A \cap e_1| = 2$ であるから, $d_1 = 0$ である. 同様に計算すると $d_2 = 1, d_3 = 0, d_4 = 1$ となり, $\delta_{A|B} = (0, 1, 0, 1)$ となる. すべての V の分割についてこのように計算することによって, 配置行列

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る. カットイデアルは

$$\langle x_2x_7 - x_1x_8, x_3x_6 - x_1x_8, x_4x_5 - x_1x_8 \rangle$$

となる.

4.3 カットイデアルの既存の結果

グラフ G のカットイデアル I_G に対し, μ_{I_G} を, I_G の極小生成系を成す多項式の中で最大の次数を持つ多項式の次数を表すとする. 本研究では, $I_G = (0)$ のときの μ_{I_G} の値は定めない. この準備の下, カットイデアルやカット多面体の既存の結果を紹介していく. まずはカットイデアルの生成系に関する結果を紹介する.

Proposition 4.8 ([7]). グラフ G のカットイデアルが2次以下の2項式で生成されるための必要十分条件は, G がマイナーとして K_4 を持たないことである.

Proposition 4.9. グラフ G のカットイデアルが2次生成であるならば, G は平面グラフである.

このように, カットイデアルの生成系の次数とグラフの対応付けができています. Proposition 4.9 は, Proposition 4.8 からグラフ G が K_4 をマイナーに持たないことと, 平面グラフであることの必要十分条件が「グラフ G が $(K_5, K_{3,3})$ をマイナーに持たない」であることからわかる. 次に, グラフ操作と生成系の関係を紹介する.

Proposition 4.10 ([25]). グラフ H が, グラフ G の辺を縮約して得られるグラフであるとする, $\mu_{I_H} \leq \mu_{I_G}$ が成り立つ.

Conjecture 4.11 ([25]). グラフ H が, グラフ G の辺を除去して得られるグラフであるとする, $\mu_{I_H} \leq \mu_{I_G}$ が成り立つ.

Theorem 4.12 ([27]). グラフ G_1 と G_2 が同じ大きさ l のクリークを持つとし, H を G_1 と G_2 のクリークサムであるとする. $1 \leq l \leq 3$ であるとき, $\mu_{I_H} = \max\{\mu_{I_{G_1}}, \mu_{I_{G_2}}\}$ が成り立つ.

縮約に関しては Proposition 4.10 のような報告例がいくつかあるが, 辺の除去に関しては, Conjecture 4.11 しかない. 次に, カットイデアルのグレブナー基底に関する結果を紹介する.

Proposition 4.13 ([20]). グラフ G が (K_4, \mathcal{C}_5) をマイナーに持たないとき, $K[x]$ 上の単項式順序 $<$ が存在して, I_G の $<$ に関するグレブナー基底は2次の2項式から成る.

Theorem 4.14 ([27]). グラフ G_1 と G_2 が同じ大きさ l のクリークを持つとし, $K[x]$ 上の単項式順序 $<, <'$ を固定する. また, I_{G_1} の $<$ に関するグレブナー基底, I_{G_2} の $<'$ に関するグレブナー基底がそれぞれ2次の2項式から成るとする. さらに, H を G_1 と

G_2 のクリークサムであるとする. $1 \leq l \leq 3$ であるならば, $K[x]$ 上の単項式順序 $<$ が存在して H のカットイデアルの $<$ に関するグレブナー基底は 2 次の 2 項式から成る.

カットイデアルの生成系の次数に関しては, Proposition 4.8 のように必要十分条件が判明しているものもあるが, グレブナー基底の次数に関してはほぼわかっていない. 2 次に次数を制限しても, ほぼわかっていない状況である. 最後に, カット多面体の性質に関する結果を紹介する.

Proposition 4.15 ([14]). グラフ G のカット多面体 $\text{Cut}(G)$ のトーリック環 $K[A_G]$ について, 次の 2 条件は同値である.

- (i) $K[A_G]$ は正規であり Gorenstein である.
- (ii) グラフ G は K_5 をマイナーに持たず, 次の 2 条件のうち 1 つを満たす.
 - (a) G は長さ 6 以上のサイクルを誘導部分グラフに持たない二部グラフである.
 - (b) G は橋を持たないコーダルグラフである.

Conjecture 4.16 ([25]). グラフ G のカット多面体 $\text{Cut}(G)$ について, 次の 2 条件は同値である.

- (i) $\text{Cut}(G)$ は正規である.
- (ii) グラフ G が K_5 をマイナーに持たない.

Conjecture 4.16 の同値予想のうち, 「 $\text{Cut}(G)$ が正規である \Rightarrow グラフ G が K_5 をマイナーに持たない」については [25] で正しいことが示されている. 示されていないのは必要性となっている. また, 必要性の予想は条件を少し弱くしたものではあるが解決されている.

Proposition 4.17 ([13]). グラフ G のカット多面体 $\text{Cut}(G)$ について, 次が成り立つ.

$$\text{Cut}(G) \text{ が正規である} \Leftarrow \text{グラフ } G \text{ が } K_5 \setminus \{e\} \text{ をマイナーに持たない}$$

ここで, $K_5 \setminus \{e\}$ は K_5 からある辺を 1 本取り除いたグラフである.

Sturmfels-Sulivant の論文 [25] で, 「グラフ G のカット多面体が正規であるならば, 辺の縮約によって得られるグラフのカット多面体も正規である」ことが示されており, 大杉の論文 [13] で, 「グラフ G のカット多面体が正規であるならば, 辺の除去によって得られるグラフのカット多面体も正規である」ことが示された.

4.4 カットイデアルと binary graph model

統計学において、項目が2つの内容をいくつか持つ分割表、すなわち $2 \times 2 \times \cdots \times 2$ 分割表に対して、固定する周辺和をグラフの辺によって指定した統計モデルを **binary graph model** と言う。Binary graph model のトーリックイデアルを次のように定義する [25, §4]. グラフ G を n 個の頂点を持つ連結グラフであるとし、その頂点集合を V , 辺集合を E とする. ここで、多項式環 $K[\mathbf{p}]$ と $K[\mathbf{b}]$ をそれぞれ

$$K[\mathbf{p}] = K[p_{i_1 i_2 \dots i_n} \mid i_k \in \{0, 1\}, 1 \leq k \leq n]$$

$$K[\mathbf{b}] = K[b_{ij}^e \mid i, j \in \{0, 1\}, e \in E]$$

と定める. このとき、次のような環準同型写像 ψ_G を考える.

$$\begin{aligned} \psi_G : K[\mathbf{p}] &\rightarrow K[\mathbf{b}] \\ p_{i_1 i_2 \dots i_n} &\mapsto \prod_{\{k, l\} \in E} b_{i_k i_l}^{kl} \end{aligned}$$

この写像 ψ_G の核 $\text{Ker}(\psi_G)$ をグラフ G の binary graph model のトーリックイデアルであると定める. 次に、 $(0, 1)$ ベクトル $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ に付随する分割 $A(\mathbf{i})|B(\mathbf{i})$ を以下のように定める.

$$k \in B(\mathbf{i}) \Leftrightarrow i_k = 1$$

ただし、 $1 \leq k \leq n$ である. 同様に、 $n+1$ 個の頂点の分割 $A|B$ ($n+1 \in A$) に対して、上記の方法を逆にたどることで同じ $(0, 1)$ ベクトル \mathbf{i} を得ることができるため、同値関係を入れることができる. この表記の下、次の定理が成り立つ [25, Theorem 4.1].

Theorem 4.18. 多項式環 $K[\mathbf{p}]$ と $K[\mathbf{q}]$ の間の環準同型写像 γ を次のように定める.

$$\begin{aligned} \gamma : K[\mathbf{p}] &\rightarrow K[\mathbf{q}] \\ p_{\mathbf{i}} &\mapsto q_{A(\mathbf{i})|B(\mathbf{i})} \end{aligned}$$

このとき、次が成り立つ.

$$\gamma(\text{Ker}(\psi_G)) = I_{\hat{G}}$$

この定理により、あるグラフ G より導かれる binary graph model のトーリックイデアルと \hat{G} のカットイデアルが一致することがわかる.

第 5 章

カットイデアルの 2 次グレブナー基底

この章では、前章で定義したカットイデアルのグレブナー基底のうち、2 次の 2 項式から成るものに焦点を当てて、グラフとの対応を調べている。最初に、5.1 節ではサイクルのカットイデアルについて紹介する。サイクルのカットイデアルのグレブナー基底は 2 次の 2 項式から成ることが示されていた [3, 12] が、その証明に誤りがあったことについて、誤りである理由とともに紹介する。同時に、長さ 7 以下のサイクルのカットイデアルについて、グレブナー基底が 2 次の 2 項式から成ることを証明した。次に、5.2 節では日比孝之のトーリックイデアルに関する予想である、「ある順序で 2 次のグレブナー基底を持つなら、辞書式順序か逆辞書式順序でも 2 次のグレブナー基底を持つ」という予想について、カットイデアルにおいて否定的な解決ができたことを紹介する。最後に、5.3 節では、カットイデアルの計算実験について紹介する。「カットイデアルが 2 次生成だがグレブナー基底は 2 次から成らない」という例を構成するために行った計算実験について、その方法と結果を載せている。第 5.2 節で紹介したグラフはこの計算実験により発見された。

5.1 サイクルのカットイデアル

Chifman と Petrović は、あるグラフから導かれるイデアル I のグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成る単項式順序が存在し、その順序がある具体的な辞書式順序であることを定理として述べている [3]。この後、Nagel と Petrović はこの I がサイクルのカットイデアルと一致することを示した [12, Proposition 3.2]。この結果により、「一般の長さのサイクル C_n のカットイデアルにはそのグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成るような辞書式順序が存在する」ということが証明されたが、実は Chifman と Petrović [3] の証明に誤りがあったことを紹介する。最初に、Petrović らの提唱する構成法では I_{C_n} のグレブ

ナー基底が2次の2項式から成らない例を紹介する．図5.1のグラフがその例である．

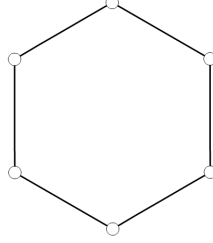


図5.1 Petrović の主張する命題を否定できる例となるグラフ

このグラフの配置行列は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Petrović らが [3]§5 で使用している順序をもとに計算した結果を以下に示す．

順序 < :

$$\begin{aligned} x_1 &> x_{25} > x_{21} > x_{19} > x_{18} > x_{17} > x_{13} > x_{11} > x_{10} > x_9 > x_7 > x_6 > x_5 > x_4 > \\ x_3 &> x_2 > x_{31} > x_{30} > x_{29} > x_{28} > x_{27} > x_{26} > x_{24} > x_{23} > x_{22} > x_{20} > x_{16} > \\ x_{15} &> x_{14} > x_{12} > x_8 > x_{32} \end{aligned}$$

から導かれる辞書式順序

グレブナー基底 :

$$\begin{aligned} \{ & x_{14}x_{22} - x_{16}x_{20}, x_{14}x_{24} - x_{15}x_{23}, -x_{15}x_{20} + x_{26}x_8, x_{12}x_{26} - x_{16}x_{23}, x_{14}x_{29} - \\ & x_{16}x_{27}, x_{15}x_{29} - x_{16}x_{28}, x_{20}x_{29} - x_{22}x_{27}, -x_{12}x_{32} + x_{23}x_{29}, -x_{16}x_{32} + x_{26}x_{29}, x_{12}x_{30} - \\ & x_{16}x_{27}, -x_{14}x_{32} + x_{23}x_{30}, -x_{15}x_{32} + x_{24}x_{30}, -x_{15}x_{27} + x_{31}x_8, -x_{14}x_{32} + x_{20}x_{31}, x_{22}x_{30} - \\ & x_{22}x_8, -x_2x_{31} + x_3x_{30}, -x_{12}x_{24} + x_3x_{31}, -x_{20}x_{24} + x_{32}x_4, x_{12}x_4 - x_{14}x_3, -x_2x_{26} + \\ & x_{22}x_4, -x_{23}x_8 + x_{27}x_4, -x_{24}x_8 + x_{28}x_4, -x_2x_{31} + x_{29}x_4, -x_{15}x_{20} + x_{30}x_4, -x_{15}x_{23} + \\ & x_{31}x_4, -x_{22}x_{23} + x_{32}x_5, -x_{14}x_2 + x_5x_8, x_{15}x_5 - x_{16}x_4, x_{24}x_5 - x_{26}x_3, -x_{12}x_{20} + \\ & x_{27}x_5, -x_2x_{31} + x_{28}x_5, -x_{12}x_{22} + x_{29}x_5, -x_{16}x_{20} + x_{30}x_5, -x_{16}x_{23} + x_{31}x_5, -x_{22}x_{24} + \\ & x_{32}x_6, -x_{15}x_2 + x_6x_8, x_{12}x_6 - x_{16}x_3, x_{14}x_6 - x_{16}x_4, -x_2x_{26} + x_{20}x_6, x_{23}x_6 - \\ & x_{26}x_3, -x_2x_{31} + x_{27}x_6, -x_{15}x_{22} + x_{30}x_6, -x_{16}x_{24} + x_{31}x_6, -x_{12}x_8 + x_{14}x_7, -x_2x_{29} + \\ & x_{22}x_7, x_{23}x_7 - x_{27}x_3, x_{24}x_7 - x_{28}x_3, -x_2x_{31} + x_{26}x_7, x_{15}x_9 - x_{16}x_8, -x_{12}x_{20} + \\ & x_{23}x_9, -x_2x_{31} + x_{24}x_9, -x_{16}x_{20} + x_{26}x_9, x_{28}x_9 - x_{29}x_8, -x_{16}x_{27} + x_{31}x_9, -x_{12}x_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_3x_9, -x_{14}x_2 + x_4x_9, -x_{16}x_2 + x_6x_9, x_{10}x_{32} - x_{22}x_{28}, x_{10}x_{12} - x_{16}x_7, x_{10}x_{14} - \\
& x_{16}x_8, x_{10}x_{20} - x_{22}x_8, x_{10}x_{23} - x_2x_{31}, x_{10}x_{24} - x_{28}x_6, x_{10}x_{26} - x_{15}x_{22}, x_{10}x_{27} - \\
& x_{29}x_8, x_{10}x_{31} - x_{16}x_{28}, x_{10}x_3 - x_6x_7, x_{10}x_4 - x_{15}x_2, x_{10}x_5 - x_{16}x_2, x_{11}x_{32} - \\
& x_{24}x_{27}, x_{11}x_{16} - x_{12}x_{15}, x_{11}x_{20} - x_{23}x_8, x_{11}x_{22} - x_2x_{31}, x_{11}x_{26} - x_{15}x_{23}, x_{11}x_{29} - \\
& x_{12}x_{28}, x_{11}x_{30} - x_{15}x_{27}, x_{11}x_2 - x_3x_8, x_{11}x_5 - x_{14}x_3, x_{11}x_6 - x_{15}x_3, x_{11}x_9 - \\
& x_{12}x_8, x_{10}x_{11} - x_{15}x_7, x_{13}x_{32} - x_{24}x_{29}, x_{13}x_8 - x_{15}x_7, -x_{12}x_{15} + x_{13}x_{14}, x_{13}x_{20} - \\
& x_2x_{31}, x_{13}x_{22} - x_{29}x_6, -x_{12}x_{24} + x_{13}x_{23}, x_{13}x_{26} - x_{16}x_{24}, -x_{12}x_{28} + x_{13}x_{27}, x_{13}x_{30} - \\
& x_{16}x_{28}, x_{13}x_2 - x_6x_7, x_{13}x_4 - x_{15}x_3, x_{13}x_5 - x_{16}x_3, x_{13}x_9 - x_{16}x_7, x_{12}x_{17} - \\
& x_{27}x_3, x_{14}x_{17} - x_{23}x_8, x_{15}x_{17} - x_{24}x_8, x_{16}x_{17} - x_2x_{31}, x_{17}x_{22} - x_2x_{32}, x_{17}x_{26} - \\
& x_{20}x_{24}, x_{17}x_{29} - x_{32}x_7, x_{17}x_{30} - x_{32}x_8, x_{17}x_{31} - x_{24}x_{27}, x_{17}x_5 - x_2x_{23}, x_{17}x_6 - \\
& x_2x_{24}, x_{17}x_9 - x_2x_{27}, x_{10}x_{17} - x_2x_{28}, x_{13}x_{17} - x_{28}x_3, x_{18}x_8 - x_2x_{27}, -x_{12}x_{20} + \\
& x_{14}x_{18}, x_{15}x_{18} - x_2x_{31}, -x_{12}x_{22} + x_{16}x_{18}, x_{18}x_{24} - x_3x_{32}, x_{18}x_{26} - x_{22}x_{23}, x_{18}x_{28} - \\
& x_{32}x_7, x_{18}x_{30} - x_{22}x_{27}, -x_{12}x_{32} + x_{18}x_{31}, x_{18}x_4 - x_2x_{23}, x_{18}x_6 - x_{22}x_3, x_{10}x_{18} - \\
& x_2x_{29}, x_{11}x_{18} - x_{27}x_3, x_{13}x_{18} - x_{29}x_3, x_{19}x_8 - x_2x_{28}, x_{12}x_{19} - x_{29}x_3, x_{14}x_{19} - \\
& x_2x_{31}, x_{15}x_{19} - x_{28}x_6, x_{16}x_{19} - x_{29}x_6, x_{19}x_{20} - x_2x_{32}, x_{19}x_{23} - x_3x_{32}, x_{19}x_{26} - \\
& x_{22}x_{24}, x_{19}x_{27} - x_{32}x_7, x_{19}x_{30} - x_{22}x_{28}, x_{19}x_{31} - x_{24}x_{29}, x_{19}x_4 - x_2x_{24}, x_{19}x_5 - \\
& x_{22}x_3, x_{19}x_9 - x_2x_{29}, x_{11}x_{19} - x_{28}x_3, x_{12}x_{21} - x_2x_{31}, x_{14}x_{21} - x_{15}x_{20}, -x_{15}x_{22} + \\
& x_{16}x_{21}, -x_{20}x_{24} + x_{21}x_{23}, x_{21}x_{27} - x_{32}x_8, x_{21}x_{29} - x_{22}x_{28}, -x_{15}x_{32} + x_{21}x_{31}, -x_2x_{24} + \\
& x_{21}x_3, -x_2x_{26} + x_{21}x_5, -x_2x_{28} + x_{21}x_7, x_{21}x_9 - x_{22}x_8, x_{11}x_{21} - x_{24}x_8, x_{13}x_{21} - \\
& x_{28}x_6, x_{18}x_{21} - x_2x_{32}, -x_2x_{31} + x_{25}x_8, x_{14}x_{25} - x_{16}x_{23}, x_{15}x_{25} - x_{16}x_{24}, x_{20}x_{25} - \\
& x_{22}x_{23}, -x_{12}x_{32} + x_{25}x_{27}, -x_{24}x_{29} + x_{25}x_{28}, -x_{16}x_{32} + x_{25}x_{30}, x_{2x_{25}} - x_{22}x_3, x_{25}x_4 - \\
& x_{26}x_3, x_{25}x_7 - x_{29}x_3, -x_{12}x_{22} + x_{25}x_9, x_{10}x_{25} - x_{29}x_6, x_{11}x_{25} - x_{12}x_{24}, x_{17}x_{25} - \\
& x_3x_{32}, x_{21}x_{25} - x_{22}x_{24}, x_{1x_{32}} - x_2x_{31}, x_{1x_{20}} - x_{14}x_2, x_{1x_{22}} - x_{16}x_2, x_{1x_{23}} - \\
& x_{14}x_3, x_{1x_{24}} - x_{15}x_3, x_{1x_{26}} - x_{16}x_4, x_{1x_{27}} - x_{12}x_8, x_{1x_{28}} - x_{15}x_7, x_{1x_{29}} - \\
& x_{16}x_7, x_{1x_{30}} - x_{16}x_8, x_{1x_{31}} - x_{12}x_{15}, x_{1x_{17}} - x_3x_8, x_{1x_{18}} - x_{12}x_2, x_{1x_{19}} - \\
& x_6x_7, x_{1x_{21}} - x_{15}x_2, x_{1x_{25}} - x_{16}x_3, -x_{29}x_8 + x_{30}x_7, -x_{12}x_{28} + x_{31}x_7, -x_3x_8 + \\
& x_4x_7, -x_{12}x_2 + x_5x_7, -x_{22}x_{27} + x_{32}x_9, -x_2x_{27} + x_{20}x_7, -x_2x_{23} + x_{20}x_3, -x_{14}x_{32} + \\
& x_{26}x_{27}, x_{14}x_{28} - x_{15}x_{27}, x_{20}x_{28} - x_{32}x_8, x_{23}x_{28} - x_{24}x_{27}, -x_{15}x_{32} + x_{26}x_{28}, -x_{16}x_{32} + \\
& x_{22}x_{31}, \underline{-x_{14}x_{15}x_2 + x_{16}x_4x_8}, \underline{-x_{14}x_2x_{26} + x_{16}x_{20}x_4}, \underline{x_{14}x_2x_{32} - x_{22}x_{23}x_8}, \\
& \underline{-x_{14}x_{26}x_3 + x_{16}x_{23}x_4}, \underline{-x_{15}x_{26}x_3 + x_{16}x_{24}x_4}, \underline{-x_{12}x_{15}x_{20} + x_{16}x_{23}x_8}, \\
& \underline{x_{15}x_2x_{32} - x_{22}x_{24}x_8}, \underline{x_2x_{26}x_{32} - x_{20}x_{22}x_{24}}, \underline{-x_{12}x_{20}x_8 + x_{14}x_2x_{27}}, \\
& \underline{-x_{12}x_{28}x_8 + x_{15}x_{27}x_7}, \underline{-x_{12}x_{29}x_8 + x_{16}x_{27}x_7}, \underline{x_{15}x_{32}x_7 - x_{24}x_{29}x_8}, \\
& \underline{-x_2x_{27}x_{28} + x_{32}x_7x_8}, \underline{x_{12}x_{32}x_7 - x_{27}x_{29}x_3}, \underline{-x_{12}x_2x_{32} + x_{22}x_{27}x_3}, \\
& \underline{-x_{12}x_2x_{28} + x_{29}x_3x_8}, \underline{-x_{12}x_{23}x_8 + x_{14}x_{27}x_3}, \underline{-x_{12}x_{24}x_8 + x_{15}x_{27}x_3}, \\
& \underline{x_{15}x_{22}x_3 - x_{16}x_2x_{24}}, \underline{-x_{22}x_{23}x_{24} + x_{26}x_3x_{32}}, \underline{-x_2x_{24}x_{27} + x_3x_{32}x_8},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{x_{15}x_3x_{32} - x_2x_{24}x_{31}}, \underline{-x_{12}x_{22}x_{24} + x_{16}x_3x_{32}}, \underline{-x_{12}x_{15}x_2 + x_{16}x_3x_8}, \\
& \underline{-x_{12}x_{15}x_{20} + x_{14}x_2x_{31}}, \underline{x_{15}x_2x_{31} - x_{16}x_{24}x_8}, \underline{-x_{12}x_{15}x_{22} + x_{16}x_2x_{31}}, \\
& \underline{-x_{14}x_{32}x_8 + x_{15}x_{20}x_{27}}, \underline{x_{15}x_{22}x_{27} - x_{16}x_{32}x_8}, \underline{-x_{12}x_{14}x_{32} + x_{16}x_{23}x_{27}}, \\
& \underline{-x_{12}x_{15}x_{32} + x_{16}x_{24}x_{27}}, \underline{x_{20}x_{24}x_{27} - x_{23}x_{32}x_8}, \underline{-x_{15}x_{22}x_{23} + x_{16}x_{20}x_{24}}, \\
& \underline{-x_{12}x_{20}x_{24} + x_2x_{23}x_{31}}, \underline{-x_{15}x_{22}x_{23} + x_2x_{26}x_{31}}, \underline{-x_{12}x_{32}x_8 + x_2x_{27}x_{31}}, \\
& \underline{-x_{12}x_{22}x_{28} + x_2x_{29}x_{31}}, \underline{-x_{12}x_{15}x_{32} + x_2x_{31}^2}, \underline{x_{16}x_2x_{20}x_{32} - x_{22}^2x_{23}x_8}, \\
& \underline{-x_{12}x_{22}x_8 + x_{16}x_2x_{27}}, \underline{-x_{12}x_{22}x_{28} + x_{16}x_{32}x_7}, \underline{-x_2x_{24}x_{29} + x_{22}x_{28}x_3}, \\
& \underline{-x_{12}x_2x_{31} + x_{16}x_{27}x_3}, \underline{-x_{12}x_{20}x_{24} + x_{14}x_3x_{32}}, \underline{x_2x_{31}x_{32} - x_{22}x_{24}x_{27}}, \\
& \underline{-x_{12}x_{28}x_{32} + x_{24}x_{27}x_{29}}, \underline{-x_{12}x_{20}x_{32} + x_{22}x_{23}x_{27}}, \underline{-x_{22}x_{27}x_{28} + x_{29}x_{32}x_8}, \\
& \underline{x_2x_{28}x_{31} - x_{24}x_{29}x_8}, \underline{-x_2^2x_{31} + x_{22}x_3x_8}, \\
& \underline{x_{16}x_2x_{32}^2 - x_{22}^2x_{24}x_{27}}, \underline{x_{16}x_2x_{28}x_{32} - x_{22}x_{24}x_{29}x_8}, \underline{-x_{12}x_{15}x_{22}x_{28} + x_{16}x_{24}x_{29}x_8}, \\
& \underline{-x_{12}x_{15}^2x_{22} + x_{16}^2x_{24}x_8}, \underline{-x_{12}x_{32}^2x_8 + x_{22}x_{24}x_{27}^2}, \underline{x_{12}x_{20}^2x_{24} - x_{22}x_{23}^2x_8}, \\
& \underline{-x_{12}x_{32}x_8^2 + x_{15}x_2x_{27}^2}, \underline{x_{15}x_2x_{27}x_{28} - x_{24}x_{29}x_8^2}, \underline{-x_{12}x_{22}^2x_{28} + x_{16}x_2x_{29}x_{32}}, \\
& \underline{-x_{12}x_{15}x_{22}^2 + x_{16}^2x_2x_{32}}, \underline{-x_{12}x_{22}x_{28}^2 + x_{24}x_{29}^2x_8}, \underline{x_{15}^2x_2x_{27} - x_{16}x_{24}x_8^2}, \\
& \underline{-x_{12}x_{20}x_{22}x_{24} + x_{16}x_2x_{23}x_{32}}, \underline{-x_{12}x_{20}x_{24}x_8 + x_{15}x_2x_{23}x_{27}} \}
\end{aligned}$$

この計算は Maple 18 で行った．下線を施したのは3次以上の2項式である．Petrovićらの主張が誤りである理由を以下に記す．

$q_{i_1 i_2 \dots i_m}$ ($1 \leq j \leq m; i_j \in \{0, 1\}$) を第 j 要素が i_j である m 次元列ベクトルに対応する変数とすると，Petrović らの主張は次のように要約される．

“ n 頂点のサイクルのカットイデアル I_n に対し，2 次の2項式を

1. いずれかの要素が0で全て等しいか1で全て等しく，その要素を削除してできる2次の2項式が I_{n-1} の元である．
2. いずれかの要素のみ和をとると，1項めの和と2項めの和が1で等しくなり，どの要素を1つのみ削除しても，できあがる2次の2項式は I_{n-1} の元となる．

の2つを満たすようにとり，それらすべてを集めた集合 H を考えると，その H が I_n を生成し，さらに H がそのまま I_n のグレブナー基底となる．”

ここで， q_{\dots} の最後の要素がすべて省略されていることを念頭に置いておく．この要素は全ての要素の和をとり，2で割った余りになっている．

1. が意味するところは，例えば

$$q_{11010}q_{00100} - q_{10110}q_{01000} \quad (\text{第5成分が0ですべて等しい})$$

かつ

$$q_{1101}q_{0010} - q_{1011}q_{0100} \in I_5 \quad (\text{第5成分を取り除いた多項式})$$

という条件を満たす, というものである. また, 2. が意味するところは, 例えば

$$q_{11000}q_{00111} - q_{10111}q_{01000}$$

の各要素について考えてみると 1 つめの条件は容易にわかる.

Petrović らの誤算は, 必要な元を不必要とみなしてしまっていることにあった. 例えば $q = q_{10101}q_{01010} - q_{11111}q_{00000}$ という 2 項式は, $q \in I_6$ であるが, 各 q_{\dots} の第 2 成分を削除した 2 項式 q' は $q' \notin I_5$ となってしまう (2. の条件に反する). 一方, このグラフのカットイデアルのグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成るような単項式順序が存在することは確認できた. 以下にその順序と結果を示す.

順序 $<$:

$$\begin{aligned} x_1 &> x_{16} > x_{14} > x_{15} > x_{11} > x_{12} > x_{13} > x_7 > x_8 > x_9 > x_{10} > x_2 > x_3 > x_4 > \\ x_5 &> x_6 > x_{17} > x_{19} > x_{18} > x_{22} > x_{21} > x_{20} > x_{26} > x_{25} > x_{24} > x_{23} > x_{31} > \\ x_{30} &> x_{29} > x_{28} > x_{27} > x_{32} \end{aligned}$$

から導かれる辞書式順序

グレブナー基底:

$$\begin{aligned} \{ &-x_{23}x_{28}+x_{24}x_{27}, -x_{23}x_{29}+x_{25}x_{27}, -x_{24}x_{29}+x_{25}x_{28}, -x_{23}x_{30}+x_{26}x_{27}, -x_{24}x_{30}+ \\ &x_{26}x_{28}, -x_{25}x_{30} + x_{26}x_{29}, x_{20}x_{31} - x_{23}x_{30}, -x_{20}x_{28} + x_{21}x_{27}, x_{21}x_{31} - \\ &x_{24}x_{30}, -x_{20}x_{24} + x_{21}x_{23}, -x_{20}x_{29} + x_{22}x_{27}, -x_{21}x_{29} + x_{22}x_{28}, x_{22}x_{31} - \\ &x_{25}x_{30}, -x_{20}x_{25} + x_{22}x_{23}, -x_{21}x_{25} + x_{22}x_{24}, x_{18}x_{30} - x_{20}x_{29}, x_{18}x_{31} - \\ &x_{23}x_{29}, x_{18}x_{26}-x_{20}x_{25}, -x_{18}x_{28}+x_{19}x_{27}, x_{19}x_{30}-x_{21}x_{29}, x_{19}x_{31}-x_{24}x_{29}, -x_{18}x_{24}+ \\ &x_{19}x_{23}, x_{19}x_{26}-x_{21}x_{25}, -x_{18}x_{21}+x_{19}x_{20}, x_{17}x_{29}-x_{18}x_{28}, x_{17}x_{30}-x_{20}x_{28}, x_{17}x_{31}- \\ &x_{23}x_{28}, x_{17}x_{25}-x_{18}x_{24}, x_{17}x_{26}-x_{20}x_{24}, x_{17}x_{22}-x_{18}x_{21}, -x_{21}x_{25}+x_{32}x_6, -x_{20}x_{25}+ \\ &x_{32}x_5, -x_{27}x_6+x_{28}x_5, -x_{23}x_6+x_{24}x_5, -x_{20}x_6+x_{21}x_5, -x_{18}x_6+x_{19}x_5, -x_{20}x_{24}+ \\ &x_{32}x_4, -x_{27}x_6+x_{29}x_4, -x_{23}x_6+x_{25}x_4, -x_{20}x_6+x_{22}x_4, -x_{17}x_5+x_{18}x_4, -x_{17}x_6+ \\ &x_{19}x_4, -x_{18}x_{24}+x_3x_{32}, -x_{27}x_6+x_3x_{30}, -x_{23}x_6+x_{26}x_3, -x_{17}x_5+x_{20}x_3, -x_{17}x_6+ \\ &x_{21}x_3, -x_{18}x_6+x_{22}x_3, -x_{18}x_{21}+x_2x_{32}, x_2x_{31}-x_{27}x_6, -x_{17}x_5+x_2x_{23}, -x_{17}x_6+ \\ &x_2x_{24}, -x_{18}x_6+x_2x_{25}, x_2x_{26}-x_{20}x_6, x_{10}x_{32}-x_{21}x_{29}, x_{10}x_{23}-x_{27}x_6, x_{10}x_{24}- \\ &x_{28}x_6, x_{10}x_{25}-x_{29}x_6, x_{10}x_{26}-x_{30}x_6, x_{10}x_{20}-x_2x_{30}, x_{10}x_{18}-x_2x_{29}, x_{10}x_{17}- \\ &x_2x_{28}, -x_{20}x_{29}+x_{32}x_9, -x_{10}x_{27}+x_{28}x_9, x_{23}x_9-x_{27}x_5, x_{24}x_9-x_{27}x_6, x_{25}x_9- \\ &x_{29}x_5, x_{26}x_9-x_{30}x_5, -x_2x_{30}+x_{21}x_9, x_{19}x_9-x_2x_{29}, x_{17}x_9-x_2x_{27}, -x_{10}x_5+ \\ &x_6x_9, -x_{20}x_{28}+x_{32}x_8, -x_{10}x_{27}+x_{29}x_8, x_{23}x_8-x_{27}x_4, x_{24}x_8-x_{28}x_4, x_{25}x_8- \\ &x_{27}x_6, x_{26}x_8-x_{30}x_4, -x_2x_{30}+x_{22}x_8, x_{18}x_8-x_2x_{27}, x_{19}x_8-x_2x_{28}, -x_{10}x_4+ \\ &x_6x_8, -x_4x_9+x_5x_8, -x_{18}x_{28}+x_{32}x_7, -x_{10}x_{27}+x_{30}x_7, x_{23}x_7-x_{27}x_3, x_{24}x_7- \\ &x_{28}x_3, x_{25}x_7-x_{29}x_3, x_{26}x_7-x_{27}x_6, -x_2x_{27}+x_{20}x_7, -x_2x_{28}+x_{21}x_7, -x_2x_{29}+ \\ &x_{22}x_7, -x_{10}x_3+x_6x_7, -x_3x_9+x_5x_7, -x_3x_8+x_4x_7, x_{13}x_{32}-x_{24}x_{29}, x_{13}x_{27}- \end{aligned}$$

$x_{31}x_7, -x_{10}x_{31} + x_{13}x_{30}, x_{13}x_{23} - x_3x_{31}, x_{13}x_{26} - x_{31}x_6, x_{13}x_{20} - x_{27}x_6, x_{13}x_{21} -$
 $x_{28}x_6, x_{13}x_{22} - x_{29}x_6, x_{13}x_{18} - x_{29}x_3, x_{13}x_{17} - x_{28}x_3, -x_{10}x_3 + x_{13}x_2, x_{12}x_{32} -$
 $x_{23}x_{29}, x_{12}x_{28} - x_{31}x_7, x_{12}x_{30} - x_{31}x_9, x_{12}x_{24} - x_3x_{31}, x_{12}x_{26} - x_{31}x_5, x_{12}x_{20} -$
 $x_{27}x_5, x_{12}x_{21} - x_{27}x_6, x_{12}x_{22} - x_{29}x_5, x_{12}x_{19} - x_{29}x_3, x_{12}x_{17} - x_{27}x_3, x_{12}x_6 -$
 $x_{13}x_5, x_{12}x_2 - x_3x_9, x_{10}x_{12} - x_{13}x_9, x_{11}x_{32} - x_{23}x_{28}, x_{11}x_{29} - x_{31}x_7, x_{11}x_{30} -$
 $x_{31}x_8, x_{11}x_{25} - x_3x_{31}, x_{11}x_{26} - x_{31}x_4, x_{11}x_{20} - x_{27}x_4, x_{11}x_{21} - x_{28}x_4, x_{11}x_{22} -$
 $x_{27}x_6, x_{11}x_{18} - x_{27}x_3, x_{11}x_{19} - x_{28}x_3, x_{11}x_6 - x_{13}x_4, x_{11}x_5 - x_{12}x_4, x_{11}x_2 -$
 $x_3x_8, x_{10}x_{11} - x_{13}x_8, x_{11}x_9 - x_{12}x_8, x_{15}x_{32} - x_{24}x_{30}, x_{15}x_{27} - x_{31}x_8, -x_{10}x_{31} +$
 $x_{15}x_{29}, x_{15}x_{23} - x_{31}x_4, x_{15}x_{25} - x_{31}x_6, x_{15}x_{20} - x_{30}x_4, x_{15}x_{22} - x_{30}x_6, x_{15}x_{18} -$
 $x_{27}x_6, x_{15}x_{19} - x_{28}x_6, x_{15}x_{17} - x_{28}x_4, -x_{13}x_4 + x_{15}x_3, -x_{10}x_4 + x_{15}x_2, -x_{13}x_8 +$
 $x_{15}x_7, x_{14}x_{32} - x_{23}x_{30}, x_{14}x_{28} - x_{31}x_8, x_{14}x_{29} - x_{31}x_9, x_{14}x_{24} - x_{31}x_4, x_{14}x_{25} -$
 $x_{31}x_5, x_{14}x_{21} - x_{30}x_4, x_{14}x_{22} - x_{30}x_5, x_{14}x_{18} - x_{27}x_5, x_{14}x_{19} - x_{27}x_6, x_{14}x_{17} -$
 $x_{27}x_4, x_{14}x_6 - x_{15}x_5, -x_{12}x_4 + x_{14}x_3, x_{14}x_2 - x_4x_9, x_{10}x_{14} - x_{15}x_9, -x_{12}x_8 +$
 $x_{14}x_7, -x_{12}x_{15} + x_{13}x_{14}, x_{16}x_{32} - x_{25}x_{30}, x_{16}x_{27} - x_{31}x_9, -x_{10}x_{31} + x_{16}x_{28}, x_{16}x_{23} -$
 $x_{31}x_5, x_{16}x_{24} - x_{31}x_6, x_{16}x_{20} - x_{30}x_5, x_{16}x_{21} - x_{30}x_6, x_{16}x_{18} - x_{29}x_5, x_{16}x_{19} -$
 $x_{29}x_6, x_{16}x_{17} - x_{27}x_6, -x_{15}x_5 + x_{16}x_4, -x_{13}x_5 + x_{16}x_3, -x_{10}x_5 + x_{16}x_2, -x_{15}x_9 +$
 $x_{16}x_8, -x_{13}x_9 + x_{16}x_7, x_{11}x_{16} - x_{12}x_{15}, x_1x_{32} - x_{27}x_6, x_1x_{27} - x_{12}x_8, x_1x_{28} -$
 $x_{13}x_8, x_1x_{29} - x_{13}x_9, x_1x_{30} - x_{15}x_9, x_1x_{31} - x_{12}x_{15}, x_1x_{23} - x_{12}x_4, x_1x_{24} -$
 $x_{13}x_4, x_1x_{25} - x_{13}x_5, x_1x_{26} - x_{15}x_5, x_1x_{20} - x_4x_9, x_1x_{21} - x_{10}x_4, x_1x_{22} -$
 $x_{10}x_5, x_1x_{18} - x_3x_9, x_1x_{19} - x_{10}x_3, x_1x_{17} - x_3x_8 \}$

この計算も Maple 18 で行った。

この結果により、現段階では「サイクルのカットイデアルに対し、 $K[x]$ 上の単項式順序 $<$ が存在して、 $<$ に関するグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成る」かどうかは不明となった。しかし、長さが 7 以下のサイクルに関しては、カットイデアルのグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成る順序が存在することを示した [18]。これについて紹介する。

一般的に、長さ m のサイクルのカットイデアルの配置行列は次のように構成されていることを念頭に置いておく。

$$\begin{aligned}
 A_{C_m} &= \{\delta_{A|B} \mid A, B \subset V, A \cup B = V, A \cap B = \emptyset\} \\
 &= \{(d_1, \dots, d_m) \in \{0, 1\}^m \mid d_1 + \dots + d_m \text{ は偶数} \}
 \end{aligned}$$

長さ 7 のサイクルの配置行列は次のようになる。

$$A_G = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A & B & C \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ただし

[illegible]

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{(d_1, \dots, d_m) \in \{0, 1\}^m \mid d_1 + \dots + d_m = r\}$$

「 I_B のグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成る辞書式順序を見つけることができれば, I_A のグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成る順序とうまく組み合わせることで I_G のグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成る辞書式順序を構成できるのではないか」

$$y_1 > y_2 > y_4 > y_3 > y_5 > y_7 > y_6 > y_{10} > y_9 > y_8 > y_{11} > y_{13} > y_{12} > y_{16} > y_{15} > \\ y_{14} > y_{20} > y_{19} > y_{18} > y_{17} > y_{21} > y_{23} > y_{22} > y_{26} > y_{25} > y_{24} > y_{30} > y_{29} > \\ y_{28} > y_{27} > y_{35} > y_{34} > y_{33} > y_{32} > y_{31}$$

から導かれる辞書式順序とすると, $<_1$ に関する I_B のグレブナー基底は2次の2項式から成る. この順序を用いて I_G のグレブナー基底が2次の2項式から成る辞書式順序を構成したい. $K[x_1, \dots, x_{64}]$ 上の単項式順序 $<$ を,

$$\begin{aligned} x_{23} > x_{24} > x_{26} > x_{25} > x_{27} > x_{29} > x_{28} > x_{32} > x_{31} > x_{30} > x_{33} > x_{35} > x_{34} > \\ x_{38} > x_{37} > x_{36} > x_{42} > x_{41} > x_{40} > x_{39} > x_{43} > x_{45} > x_{44} > x_{48} > x_{47} > x_{46} > \\ x_{52} > x_{51} > x_{50} > x_{49} > x_{57} > x_{56} > x_{55} > x_{54} > x_{53} \end{aligned}$$

としておく. この順序は $<_1$ に対応している. その他の変数の順序を変えていく計算実験をすることによって I_G のグレブナー基底が2次の2項式から成る辞書式順序を構成することを試み, 成功した. 以下にその順序を記す.

$$\begin{aligned} <: x_1 > x_{17} > x_{18} > x_{19} > x_{22} > x_{20} > x_{21} > x_{13} > x_{14} > x_{15} > x_{16} > x_2 > x_3 > \\ x_4 > x_5 > x_6 > x_7 > x_8 > x_9 > x_{10} > x_{11} > x_{12} > x_{23} > x_{24} > x_{26} > x_{25} > x_{27} > \\ x_{29} > x_{28} > x_{32} > x_{31} > x_{30} > x_{33} > x_{35} > x_{34} > x_{38} > x_{37} > x_{36} > x_{42} > x_{41} > \\ x_{40} > x_{39} > x_{43} > x_{45} > x_{44} > x_{48} > x_{47} > x_{46} > x_{52} > x_{51} > x_{50} > x_{49} > x_{57} > \\ x_{56} > x_{55} > x_{54} > x_{53} > x_{58} > x_{59} > x_{60} > x_{61} > x_{62} > x_{63} > x_{64} \end{aligned}$$

長さ6以下のサイクルは G に対し辺の縮約を何度か繰り返すことによって得られる. この順序を用いて, 縮約に対応するように順序を定めれば長さ6以下のサイクルについてもグレブナー基底が2次の2項式から成ることがわかる. これによって, 次の定理を得る [18].

Theorem 5.1. グラフ G を長さ7以下のサイクルとする. このとき, I_G のグレブナー基底が2次の2項式から成る辞書式順序が存在する.

5.2 辞書式・逆辞書式順序に関するグレブナー基底

この節では, カットイデアルの辞書式・逆辞書式順序に関する命題を紹介した後に Conjecture 1.18 の否定的な解決について紹介する.

Proposition 5.2 ([25], Theorem 1.3). あるグラフ G のカットイデアル I_G がスクエアフリーなイニシャルイデアルを持つような逆辞書式順序が存在するための必要十分条件は, G が K_5 をマイナーに持たず, 誘導部分グラフとして長さ5以上のサイクルを持たないことである.

カットイデアルの配置行列は $(0, 1)$ 行列なので, この命題より次の命題がいえる.

Proposition 5.3. グラフ G が長さ5以上のサイクルを誘導部分グラフとして持つとす

る. このとき, I_G のいかなる逆辞書式順序に関するグレブナー基底も 3 次以上の 2 項式を含む.

Proof. グラフ G が誘導部分グラフとして長さ 5 以上のサイクルを持つとし, ある逆辞書式順序に関する I_G のグレブナー基底は 2 次の 2 項式から成ると仮定する. このとき, Proposition 5.2 より, I_G には $x_i^2 - x_j x_k$ という形の 0 でない多項式が存在する. 換言すれば, $2\delta_{A_i|B_i} = \delta_{A_j|B_j} + \delta_{A_k|B_k}$ なる分割が存在するということである. しかし, $\delta_{A_l|B_l}$ は $(0, 1)$ ベクトルであるため, このような条件を満たす分割は存在しない. したがって矛盾が生じるので, I_G のいかなる逆辞書式順序に関するグレブナー基底も 3 次以上の 2 項式を含む. \square

具体的な例ではあるが, 辞書式順序に関しても同様のことが言える.

Proposition 5.4. 完全二部グラフ $K_{2,3}$ のカットイデアル $I_{K_{2,3}}$ は 2 次生成であり, $I_{K_{2,3}}$ のいかなる辞書式順序に関するグレブナー基底も 3 次以上の 2 項式を含む.

Proof. 完全二部グラフ $K_{2,3}$ は図 5.2 のようなグラフである. G を完全二部グラフ $K_{2,3}$

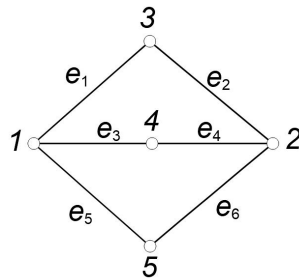


図 5.2 完全二部グラフ $K_{2,3}$

とする. G の配置行列は次のようになる.

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 4.8 より, G は K_4 をマイナーとして持たないので, I_G が 2 次生成であることがわかる. ここで, $K[x_1, \dots, x_{16}]$ 上のある辞書式順序 $<$ に関する I_G のグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成ると仮定する. 次に, S を次のような単項式の集合とする.

$$S = \{u \in \mathcal{M}_{16} \mid \pi(u) = t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7^2\}$$

このとき,

$$S = \{x_1x_{16}, x_2x_{15}, x_3x_{14}, x_4x_{13}, x_5x_{12}, x_6x_{11}, x_7x_{10}, x_8x_9\}$$

である. 一般的に, $A_1, A_2 \subset V$ に対し $A_1 \Delta A_2 = (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)$ とすると, \mathbb{F}_2^d 上において $\delta_{A_1|B_1} + \delta_{A_2|B_2} = \delta_{A_1 \Delta A_2 | B_1 \Delta B_2}$ である. $(A_i \cup B_i = V, A_i \cap B_i = \emptyset)$ よって $A \cup B = V, A \cap B = \emptyset$ となる頂点集合 V の部分集合 A, B に対し

$$\psi_{A|B}(\delta_{A_1|B_1}, \dots, \delta_{A_{2n-1}|B_{2n-1}}) = (\delta_{A_{i_1}|B_{i_1}}, \dots, \delta_{A_{i_{2n-1}}|B_{i_{2n-1}}})$$

という対応を考えることができる. ただし, \mathbb{F}_2^d において $\delta_{A_k|B_k} + \delta_{A|B} = \delta_{A_{i_k}|B_{i_k}}$ である. この対応において, $K[x]$ 上の自然に誘導される作用 $\psi_{A|B}(x_k) = x_{i_k}$ を考える. 一方,

$$\begin{pmatrix} \delta_{A_1|B_1} & \cdots & \delta_{A_{16}|B_{16}} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を行基本変形することにより

$$\begin{pmatrix} \delta_{A_1|B_1} + \delta_{A|B} & \cdots & \delta_{A_{16}|B_{16}} + \delta_{A|B} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を得る. 行基本変形の前後なのでこれらの配置行列の核は不変である. したがって $\psi_{A|B}(I_G) = I_G$ となる. すると, いま, S の各元 $x_i x_{17-i}$ に対し, $\psi_{A_i|B_i}(x_i x_{17-i}) = x_1 x_{16}$ となる. したがって $x_1 x_{16}$ が S の元のうち $<$ に関して最も小さい単項式と仮定してよく, $x_1 x_{16} \notin \text{in}_{<}(I_G)$ が従う. このとき, 次の8つの I_G の3次式を考える.

$$\begin{aligned} f_1 &= x_6 x_7 x_9 - x_1 x_5 x_{16}, \\ f_2 &= x_5 x_8 x_{10} - x_1 x_6 x_{16}, \\ f_3 &= x_5 x_8 x_{11} - x_1 x_7 x_{16}, \\ f_4 &= x_6 x_7 x_{12} - x_1 x_8 x_{16}, \\ f_5 &= x_5 x_{10} x_{11} - x_1 x_9 x_{16}, \\ f_6 &= x_6 x_9 x_{12} - x_1 x_{10} x_{16}, \\ f_7 &= x_7 x_9 x_{12} - x_1 x_{11} x_{16}, \\ f_8 &= x_8 x_{10} x_{11} - x_1 x_{12} x_{16} \end{aligned}$$

I_G の元で $x_1 x_i - x_j x_k$ あるいは $x_i x_{16} - x_j x_k$ という形をした多項式は存在しないことが配置行列を見ればわかる. このため, $x_1 x_i, x_i x_{16}, x_1 x_{16} \notin \text{in}_{<}(I_G)$ となることがわかる. ($5 \leq i \leq 12$) 各 f_i の第2項めの $x_1 x_i x_{16}$ が $<$ に関する先頭項となる場合, この単項式は $\text{in}_{<}(I_G)$ の極小生成系に属するので, 仮定である「 I_G の $<$ に関するグレブナー基底は2次の2項式から成る」に矛盾する. よって各 f_i の $<$ に関する先頭項は第1項めの単項式となる. $<$ は辞書式順序なので, $K[x_1, x_5, x_6, \dots, x_{12}, x_{16}]$ 上での大小関係をどのように定めても第2項めが先頭となるような f_i が存在する. 結果, 矛盾が導かれるので I_G のいかなる辞書式順序に関するグレブナー基底も3次以上の2項式を含む. \square

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c} \begin{cases} = 1 & i \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \\ < 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

Proposition 5.5 ([15]). 配置行列 A とその部分行列 B に対し, $K[B]$ を $K[A]$ の *combinatorial pure subring* であるとする. このとき, I_A のある辞書式順序に関するグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成るなら I_B のその辞書式順序に関するグレブナー基底も 2 次の 2 項式から成る.

Theorem 5.6 ([18]). 次のグラフ G のカットイデアルは、いかなる辞書式順序・逆辞書式順序に関するグレブナー基底を考えても 3 次以上の 2 項式を含むが、あるウェイトベクトルに関するグレブナー基底を考えると 2 次の 2 項式から成る。

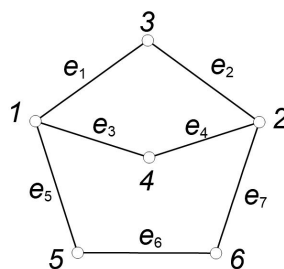


図 5.3 Conjecture 1.18 の反例

[illegible]

(辞書式順序)

グラフ G から辺 e_5, e_6, e_7 のいずれか一つを縮約すれば $K_{2,3}$ になる. $I_{K_{2,3}}$ はいかなる辞書式順序に関しても3次以上の2項式を含むため, Proposition 5.5 の対偶が成り立ち I_G のいかなる辞書式順序に関するグレブナー基底も3次以上の2項式を含む.

(逆辞書式順序)

グラフ G は長さ5のサイクルを誘導部分グラフとして含むので I_G のいかなる逆辞書式順序に関するグレブナー基底も3次以上の2項式を含む.

(ウェイトベクトル)

ベクトル $w = (25, 24, 24, 45, 46, 44, 37, 37, 47, 47, 63, 107, 47, 25, 24, 46, 36, 33, 20, 26, 102, 87, 80, 103, 92, 35, 25, 26, 53, 37, 22, 27)$ に関する I_G のグレブナー基底を計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned} & \{-x_{20}x_{31} + x_{19}x_{32}, -x_{15}x_3 + x_{14}x_2, x_{28}x_{20} - x_{27}x_{19}, -x_{27}x_{31} + x_{28}x_{32}, x_{18}x_{31} - x_{30}x_{19}, \\ & x_3x_{32} - x_8x_{19}, x_3x_{31} - x_7x_{19}, x_2x_{19} - x_{18}x_3, -x_{15}x_{19} + x_{18}x_{14}, -x_{26}x_{15} + x_{27}x_{14}, \\ & x_{27}x_3 - x_{26}x_2, x_1x_{19} - x_{17}x_3, -x_{17}x_2 + x_1x_{18}, x_2x_{31} - x_{30}x_3, -x_{15}x_{31} + x_{30}x_{14}, \\ & -x_{30}x_{20} + x_{18}x_{32}, x_7x_{27} - x_{28}x_8, x_7x_{20} - x_3x_{32}, -x_8x_{31} + x_7x_{32}, x_2x_{31} - x_6x_{19}, \\ & x_3x_{20} - x_4x_{19}, -x_1x_{31} + x_5x_{19}, x_4x_{31} - x_3x_{32}, x_{27}x_{19} - x_{18}x_{26}, -x_6x_3 + x_7x_2, \\ & -x_7x_{15} + x_6x_{14}, -x_6x_{20} + x_2x_{32}, x_2x_{32} - x_8x_{18}, x_2x_{31} - x_7x_{18}, -x_5x_3 + x_1x_7, \\ & -x_5x_2 + x_1x_6, x_{27}x_3 - x_4x_{28}, x_{28}x_{15} - x_{16}x_{27}, -x_8x_{20} + x_4x_{32}, x_{27}x_{31} - x_{30}x_{26}, \\ & x_1x_{32} - x_{10}x_{27}, x_2x_{32} - x_9x_{27}, x_{16}x_{20} - x_{15}x_{19}, x_5x_{20} - x_1x_{32}, -x_{15}x_3 + x_{13}x_1, \\ & -x_{10}x_2 + x_9x_1, -x_{15}x_{31} + x_{16}x_{32}, x_{17}x_{31} - x_{29}x_{19}, x_1x_{31} - x_{10}x_{28}, x_2x_{31} - x_9x_{28}, \\ & -x_1x_{32} + x_{17}x_8, x_1x_{31} - x_{17}x_7, x_6x_{32} - x_8x_{30}, x_6x_{31} - x_7x_{30}, x_1x_{31} - x_{29}x_3, \\ & -x_{29}x_2 + x_1x_{30}, x_{30}x_2 - x_6x_{18}, x_2x_{20} - x_4x_{18}, -x_{29}x_{20} + x_{17}x_{32}, -x_6x_{26} + x_7x_{27}, \\ & x_5x_{18} - x_1x_{30}, -x_1x_{30} + x_{17}x_6, x_{28}x_{14} - x_{16}x_{26}, x_1x_{20} - x_{17}x_4, x_2x_{32} - x_4x_{30}, \\ & x_3x_{32} - x_9x_{26}, x_{29}x_1 - x_{17}x_5, x_8x_3 - x_4x_7, -x_{11}x_{19} + x_{10}x_{18}, x_{15}x_{19} - x_{13}x_{17}, \\ & x_{10}x_{18} - x_9x_{17}, -x_7x_{15} + x_{16}x_8, -x_{11}x_{31} + x_{10}x_{30}, -x_{29}x_{18} + x_{17}x_{30}, -x_{11}x_3 + x_{10}x_2, \\ & -x_{10}x_{15} + x_{11}x_{14}, -x_1x_{30} + x_{11}x_{28}, x_8x_2 - x_4x_6, x_5x_{32} - x_{29}x_8, x_5x_{31} - x_{29}x_7, \\ & x_{15}x_3 - x_{16}x_4, x_1x_8 - x_5x_4, x_7x_{15} - x_{13}x_5, -x_{10}x_6 + x_9x_5, x_9x_{14} - x_{13}x_{10}, \\ & x_5x_{30} - x_{29}x_6, -x_1x_{32} + x_{29}x_4, -x_1x_{32} + x_{11}x_{26}, x_{15}x_{31} - x_{13}x_{29}, -x_{10}x_{30} + x_9x_{29}, \\ & -x_{11}x_7 + x_{10}x_6, -x_{23}x_{15} + x_{11}x_{27}, -x_1x_{32} + x_{23}x_{14}, x_9x_{15} - x_{11}x_{13}, -x_1x_{32} + x_{22}x_{15}, \\ & x_{23}x_3 - x_{22}x_2, x_{22}x_{14} - x_{10}x_{26}, -x_{23}x_{26} + x_{22}x_{27}, -x_{25}x_{15} + x_{13}x_{27}, -x_{25}x_{14} + x_{13}x_{26}, \\ & -x_{27}x_3 + x_{25}x_1, x_{23}x_{19} - x_{22}x_{18}, -x_{23}x_{31} + x_{22}x_{30}, -x_1x_{30} + x_{23}x_{16}, x_2x_{32} - x_{21}x_{15}, \\ & x_{24}x_{15} - x_1x_{30}, -x_2x_{32} + x_{23}x_{13}, -x_3x_{32} + x_{21}x_{14}, x_{23}x_3 - x_{21}x_1, -x_{24}x_{27} + x_{23}x_{28}, \\ & x_{27}x_{19} - x_{25}x_{17}, x_1x_{31} - x_{24}x_{14}, x_{24}x_{20} - x_{23}x_{19}, x_{23}x_{31} - x_{24}x_{32}, -x_{23}x_7 + x_{22}x_6, \\ & -x_{12}x_{15} + x_{11}x_{16}, -x_{12}x_{27} + x_1x_{30}, -x_{12}x_{14} + x_{10}x_{16}, x_1x_{31} - x_{22}x_{16}, x_{12}x_{20} - x_{10}x_{18}, \end{aligned}$$


```
M:=MakeTermOrd(mat([[25,24,24,45,46,44,37,37,47,47,63,107,47,25,24,  
46,36,33,20,26,102,87,80,103,92,35,25,26,53,37,22,27]]));  
R:= NewPolyRing(QQ, SymbolRange("x",1,32 ), M, 1);  
use R;  
A:=mat([  
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1],  
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1],  
[0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1],  
[0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1],  
[0,0,1,1,0,0,1,1,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,1],  
[0,1,1,0,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0],  
[0,1,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1],  
[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]  
]);  
  
ReducedGBasis( toric(A) );
```

5.3 カットイデアルの計算実験

現在, カットイデアル I_G が2次生成であるが, そのグレブナー基底が2次の2項式から成る単項式順序 $<$ が存在しない, という例は知られていない. そこで, 論文 [11] において, 別のトーリックイデアルに対して行われている計算実験を参考にして, 計算ソフト CoCoA と Risa/Asir を用いて, 「 I_G が2次生成であるが, どんな単項式順序を考えてもそのグレブナー基底が2次の2項式から成ることはない」という例を構成することを試みた. 具体的な手順は以下の通りである.

1. n 頂点の連結グラフを, 頂点の番号付けの変更等で同じにできるグラフを除いて全て列挙する.
2. 1. で列挙したグラフのうち, そのカットイデアルが2次生成となるものを列挙する.
3. 2. で列挙したグラフの一つを選び, ランダムにウェイトベクトルを発生させ, そのウェイトによるグレブナー基底を計算する.
4. 3. で計算したグレブナー基底が2次の2項式から成るならステップ5へ移行し, 成らないなら2.のウェイト発生からやり直す. 10000回繰り返してもグレブナー基底が2次の2項式から成らなかった場合, ステップ5へ移行する.
5. 3. と4. を, 2. で列挙したグラフ全てについて行う.

上記のうち, 1. のグラフ列挙については Maple 18 を, 2. の生成系計算については CoCoA を, 3. 以降は Risa/Asir を用いて計算した. $n = 7$ のときについて以下に記す.

表 5.1 平面連結グラフの数とグレブナー基底が2次の2項式から成らない候補のグラフの数

	グラフの総数	2次生成となるグラフの数	候補となるグラフの数
$n = 7$	517	71	4

グラフの総数では, 連結なものだけを数えており, 平面グラフでないグラフは2次生成ではないため (Proposition 4.9), 最初から除いている. また, 2次生成となるグラフの数では木になるものは除いている. なお, この方法では, I_G のグレブナー基底が2次の2項式から成る順序 (ウェイトベクトル) が存在することの探索しか行えない. 従って, 「そのカットイデアルのグレブナー基底が2次の2項式から成る順序 (ウェイトベクトル) が存在しないグラフ」の“候補”を挙げるのみに留まっている. $n \leq 6$ のグラフ G に対しては, 計算実験の結果, 全てのグラフについて「 I_G が2次生成であれば, そのグレブナー基底が2次の2項式から成る」ウェイトベクトルが存在することがわかった. 以下に候補

となるグラフを図示しておく．候補グラフ (1), (2), (3) は辺の縮約により $K_{2,3}$ を持つの

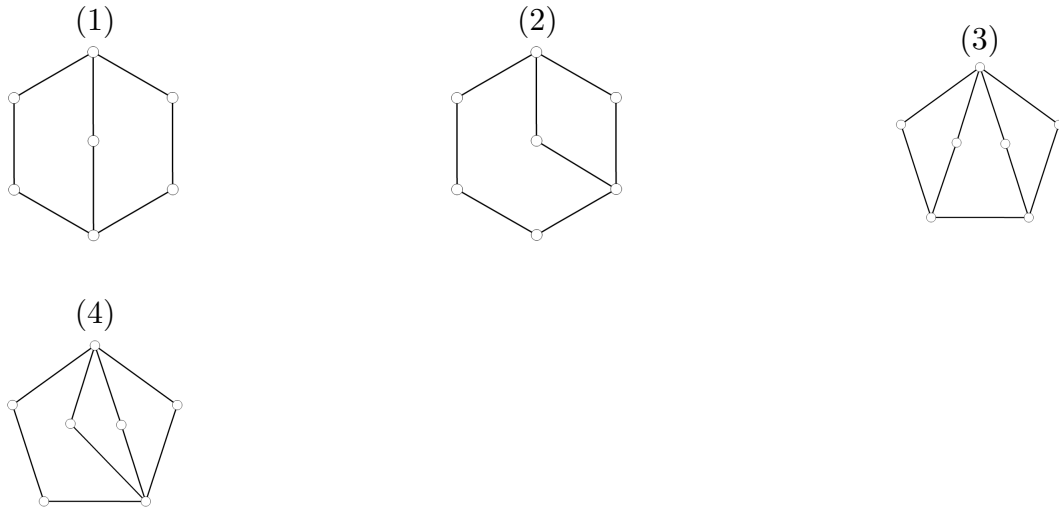


図 5.4 7 頂点の候補グラフ

で，辞書式順序では 2 次のグレブナー基底を持たない．また，全ての候補グラフが誘導部分グラフとして \mathcal{C}_5 を持つので，Proposition 5.3 より逆辞書式順序で 2 次のグレブナー基底を持たない．また，すべての候補グラフがマイナーとして図 5.3 のグラフを持つので，Theorem 5.6 の証明のときのような手法を用いれば，2 次のグレブナー基底を持つウェイトベクトルを見つけることができるかもしれない．これらのグラフが実際にどんな単項式順序を考えても，その順序に関するグレブナー基底が 2 次の 2 項式から成らないかどうかは，残念ながら未解明であり，今後の課題である．

第 6 章

$K_{2,m}$ のカット多面体の h^* 多項式

この章では，グラフのカット多面体のうち $K_{2,m}$ の h^* 多項式について紹介する．最初に，第 2 種 Stirling 数と Eulerian 多項式について定義する．また，後に必要な語句もこの節で定義・紹介する．そして，6.2 節では，完全二部グラフ $K_{2,m}$ のカット多面体の h^* 多項式について紹介する．完全二部グラフはグレブナー基底が 2 次から成ることがわかっており [20]，それによってカットイデアルがスクエアフリーなイニシャルイデアルを持つことがわかる．第 2 章で言及しているように，トーリックイデアルがスクエアフリーなイニシャルイデアルを持つときは，スクエアフリーな標準単項式の数から h^* 多項式を決定することができる．その流れに乗って，完全二部グラフ $K_{2,m}$ のカット多面体の h^* 多項式は Eulerian 多項式で書けることを証明する．

6.1 第 2 種 Stirling 数と Eulerian 多項式

第 2 種 Stirling 数 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ は n 個のものを k 個の部分集合に分ける場合の数を表す．また，第 2 種 Stirling 数は次の等式を満たしている [22]．

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{m=1}^k (-1)^{k-m} m^n \binom{k}{m}$$

任意の n 次の対称群 \mathfrak{S}_n の元 $w = w_1 w_2 \dots w_n$ に対し， $\text{des}(w) = |\{i \mid w_i > w_{i+1}\}|$ とする．このとき， $n-1$ 次の **Eulerian** 多項式 $A_n(x)$ を

$$A_n(x) := \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{des}(w)}$$

と定める．一般的に， d 次の多項式 $f(x)$ が回文的であるとは， $f(x) = x^d f(x^{-1})$ となるときに言うが，Eulerian 多項式 $A_n(x)$ は回文的な多項式，すなわち係数が左右対称であることが知られている．また，Eulerian 多項式と第 2 種 Stirling 数の間には次のような

関係がある [17, Theorem 9.1].

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x-1)^{n-k}$$

[8, Lemma 4.22 (b)] や [2, P.235] によると, カット多面体のトーリック環 $K[A_G]$ が正規かつ Gorenstein であるとき, そのカット多面体の h^* 多項式は回文的になることが知られている.

6.2 $K_{2,n-2}$ のカット多面体の h^* 多項式

ある単項式が $K[\mathbf{x}]$ 上の単項式順序 $<$ に関するトーリックイデアル I_A の標準単項式であるとは, $<$ に関する I_A のイニシャルイデアルにその単項式が属さないときに言う. イニシャル複体 $\Delta(\text{in}_{<}(I_A))$ が単模であるとき, i 次のスクエアフリーな標準単項式の数 $i-1$ 次元の $\Delta(\text{in}_{<}(I_A))$ の面の数と一致する. 次に, 第4章のカットイデアルの項で定義した多項式環 $K[\mathbf{q}]$ 上の, $q_{A|B} < q_{C|D}$ ただし $\min\{|A|, |B|\} < \min\{|C|, |D|\}$ を満たす逆辞書式順序を考える [8, Example 1.8(b)]. このとき, 次の命題が成り立つ [20].

Proposition 6.1. グラフ G を完全二部グラフ $K_{2,n-2}$ とし, その頂点集合 V が $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 = \{1, 2\}$, $V_2 = \{3, \dots, n\}$ であるとする ($n \geq 4$). このとき, $<$ に関する I_G のグレブナー基底は次の多項式から成る.

1. $q_{A|B}q_{E|F} - q_{\emptyset|[n]}q_{\{1,2\}|\{3,\dots,n\}}$ ($1 \in A, 2 \in B$),
2. $q_{A|B}q_{C|D} - q_{A \cap C|B \cup D}q_{A \cup C|B \cap D}$ ($1 \in A \cap C, 2 \in B \cap D, A \not\subset C, C \not\subset A$),
3. $q_{A|B}q_{C|D} - q_{A \cap C|B \cup D}q_{A \cup C|B \cap D}$ ($1, 2 \in A \cap C, A \not\subset C, C \not\subset A$)

ただし, $E = (B \cup \{1\}) \setminus \{2\}$, $F = (A \cup \{2\}) \setminus \{1\}$ である. また, 各多項式の先頭項は第1項めである.

この命題と f 多項式の定義からスクエアフリーな標準単項式の数 i を直接数えることによって, $K_{2,n-2}$ のカット多面体の h^* 多項式を決定する. まずはこの命題を利用してもっとも単純な例 ($n = 3$ の場合) の h^* 多項式を決定する.

Example 6.2. グラフ G を完全二部グラフ $K_{2,3}$ とする. このとき, 配置行列 A_G は第

5 章で見た通り次のような配置行列であった.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 6.1 によると, $<$ に関する I_G のグレブナー基底は次の多項式の集合となる.

$$\begin{aligned} & q\emptyset|1,2,3,4,5 \, q\{1,2\}|\{3,4,5\} - q\{3\}|\{1,2,4,5\} \, q\{4,5\}|\{1,2,3\}, \\ & q\emptyset|1,2,3,4,5 \, q\{1,2\}|\{3,4,5\} - q\{1\}|\{2,3,4,5\} \, q\{2\}|\{1,3,4,5\}, \\ & q\emptyset|1,2,3,4,5 \, q\{1,2\}|\{3,4,5\} - q\{5\}|\{1,2,3,4\} \, q\{3,4\}|\{1,2,5\}, \\ & q\emptyset|1,2,3,4,5 \, q\{1,2\}|\{3,4,5\} - q\{1,3\}|\{2,4,5\} \, q\{2,3\}|\{1,4,5\}, \\ & q\emptyset|1,2,3,4,5 \, q\{1,2\}|\{3,4,5\} - q\{1,4\}|\{2,3,5\} \, q\{2,4\}|\{1,3,5\}, \\ & q\emptyset|1,2,3,4,5 \, q\{1,2\}|\{3,4,5\} - q\{1,5\}|\{2,3,4\} \, q\{2,5\}|\{1,3,4\}, \\ & q\emptyset|1,2,3,4,5 \, q\{1,2\}|\{3,4,5\} - q\{4\}|\{1,2,3,5\} \, q\{3,5\}|\{1,2,4\}, \\ & q\{1,4\}|\{2,3,5\} \, q\{1,5\}|\{2,3,4\} - q\{1\}|\{2,3,4,5\} \, q\{2,3\}|\{1,4,5\}, \\ & q\{1,3\}|\{2,4,5\} \, q\{1,5\}|\{2,3,4\} - q\{1\}|\{2,3,4,5\} \, q\{2,4\}|\{1,3,5\}, \\ & q\{2\}|\{1,3,4,5\} \, q\{1,5\}|\{2,3,4\} - q\{2,3\}|\{1,4,5\} \, q\{2,4\}|\{1,3,5\}, \\ & q\{1,3\}|\{2,4,5\} \, q\{1,4\}|\{2,3,5\} - q\{1\}|\{2,3,4,5\} \, q\{2,5\}|\{1,3,4\}, \\ & q\{2\}|\{1,3,4,5\} \, q\{1,4\}|\{2,3,5\} - q\{2,3\}|\{1,4,5\} \, q\{2,5\}|\{1,3,4\}, \\ & q\{2\}|\{1,3,4,5\} \, q\{1,3\}|\{2,4,5\} - q\{2,4\}|\{1,3,5\} \, q\{2,5\}|\{1,3,4\}, \\ & q\{5\}|\{1,2,3,4\} \, q\{1,2\}|\{3,4,5\} - q\{3,5\}|\{1,2,4\} \, q\{4,5\}|\{1,2,3\}, \\ & q\{3\}|\{1,2,4,5\} \, q\{1,2\}|\{3,4,5\} - q\{3,4\}|\{1,2,5\} \, q\{3,5\}|\{1,2,4\}, \\ & q\{4\}|\{1,2,3,5\} \, q\{5\}|\{1,2,3,4\} - q\emptyset|1,2,3,4,5 \, q\{4,5\}|\{1,2,3\}, \\ & q\{3\}|\{1,2,4,5\} \, q\{5\}|\{1,2,3,4\} - q\emptyset|1,2,3,4,5 \, q\{3,5\}|\{1,2,4\}, \\ & q\{3\}|\{1,2,4,5\} \, q\{4\}|\{1,2,3,5\} - q\emptyset|1,2,3,4,5 \, q\{3,4\}|\{1,2,5\}, \\ & q\{4\}|\{1,2,3,5\} \, q\{1,2\}|\{3,4,5\} - q\{3,4\}|\{1,2,5\} \, q\{4,5\}|\{1,2,3\} \end{aligned}$$

先頭項は各項の第 1 項めである. このカット多面体の h^* 多項式 $h^*(\text{Cut}(G), x)$ は次のようになる.

$$h^*(\text{Cut}(G), x) = x^5 + 9x^4 + 26x^3 + 26x^2 + 9x + 1 = (x+1)(x^2+4x+1)^2$$

完全二部グラフ $K_{2,n-2}$ のカット多面体は $2n-4$ 次元であるから, スクエアフリーな標準単項式の最大次数は $2n-3$ である. $<$ に関する $I_{K_{2,n-2}}$ の次の k 次のスクエアフリーな標準単項式 ($k \leq 2n-3$)

1. $q_{\{1\} \cup A_1 | \{2\} \cup B_1} \cdots q_{\{1\} \cup A_k | \{2\} \cup B_k}$
2. $q_{A'_1 | \{1,2\} \cup B'_1} \cdots q_{A'_k | \{1,2\} \cup B'_k}$

が $<$ に関するイニシャル単項式で割り切れないための必要十分条件はそれぞれ

1. $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$
2. $A'_1 \subsetneq A'_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A'_k$ かつ $(A'_1, A'_k) \neq (\emptyset, \{3, \dots, n\})$

となることがわかる. 1, 2 のそれぞれの場合の単項式の数と次の命題が成り立つ.

Proposition 6.3. 上記の条件 1, 2 を満たす単項式の数それぞれ

$$(k-1)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + 2k! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right\} + (k+1)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k+1 \end{matrix} \right\}$$

$$k! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right\} + (k+1)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k+1 \end{matrix} \right\}$$

となる. ただし, $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ は第 2 種 Stirling 数である.

Proof. 第 2 種 Stirling 数 $\left\{ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\}$ は a 個のものを b 個の空でない部分集合に分けたときの場合の数を表していることに注意する. 条件 1 を考えると, 次の 4 つの場合分けが得られる. 条件 2 においては, $(A'_1, A'_k) \neq (\emptyset, \{3, \dots, n\})$ という制限を条件 1 にかけて考えれ

	$A_1 = \emptyset$	$A_1 \neq \emptyset$
$A_k = \{3, \dots, n\}$	$(k-1)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$	$k! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right\}$
$A_k \neq \{3, \dots, n\}$	$k! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right\}$	$(k+1)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k+1 \end{matrix} \right\}$

表 6.1 条件 1 を満たす単項式の数

ばよいので, それぞれの場合の数の和を取れば上記のようなスクエアフリーな標準単項式の数を得る. \square

スクエアフリーな標準単項式の数直接数える際にこの命題を利用する. Δ を整凸多面体 \mathcal{P} の三角形分割とする. Δ の f 多項式 $f_\Delta(x) = \sum_{i=0}^{d+1} f_{i-1}x^i$ の各係数 f_i は Δ の i 次元の面の数を示していることを思い出しておく. ($i = 0, 1, \dots, d$) ただし, $f_{-1} = 0$ である. Proposition 6.1 を見れば, 完全二部グラフ $K_{2,n-2}$ は $<$ に関してスクエアフリーなイニシャルイデアルを持つ. 従って Proposition 2.8 より単模な三角形分割を持つので, Proposition 2.11 より h 多項式から h^* 多項式を計算することができる.

Theorem 6.4. 整凸多面体 \mathcal{P} を完全二部グラフ $K_{2,n-2}$ のカット多面体とし, Δ を \prec に関する \mathcal{P} の単模な三角形分割 $\Delta(\text{in}_{\prec}(I_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}))$ とする. このとき, \mathcal{P} の h^* 多項式と Δ の h 多項式について

$$h^*(\mathcal{P}, x) = h_{\Delta}(x) = (x+1)(A_{n-2}(x))^2$$

が成り立つ. ただし, $A_n(x)$ は $n-1$ 次の *Eulerian* 多項式である.

この定理により, \mathcal{P} の正規化体積を求めることができる. $x=1$ を代入して $h^*(\mathcal{P}, x) = 2((n-2)!)^2$ となる.

Proof. 完全二部グラフ $K_{2,n-2}$ のカット多面体の三角形分割 Δ の f 多項式は次のように与えられる.

$$f_{\Delta}(x) = \sum_{k=0}^{2n-3} f_{k-1} x^k$$

各係数 f_{k-1} は k 次のスクエアフリーな標準単項式の数と一致しているから, Proposition 6.3 を利用して上記の式を変形すると次のようになる.

$$f_{\Delta}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{n-2} C_k x^k \right)$$

ただし,

$$\begin{aligned} B_k &= (k-1)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + 2k! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right\} + (k+1)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k+1 \end{matrix} \right\} \\ C_k &= 2k! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right\} + (k+1)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k+1 \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

である. ここで, $X = x-1$ とする. $K_{2,n-2}$ は長さ 6 以上のサイクルを誘導部分グラフとして持たないので, Proposition 2.11 と Proposition 4.15 から, $h_{\Delta}(x)$ は回文的な $2n-5$ 次の多項式となることがわかる. したがって

$$\begin{aligned} h_{\Delta}(x) &= x^{2n-5} h_{\Delta}(x^{-1}) = x^{2n-5} \sum_{k=0}^{2n-3} f_{k-1} x^{-k} (1-x^{-1})^{2n-3-k} = x^{-2} \sum_{k=0}^{2n-3} f_{k-1} X^{2n-3-k} \\ &= x^{-2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k X^{n-k-1} \right) \left(\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{n-k-2} \right) \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n-1} B_k X^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=1}^n B_{k-1} X^{(n-1)-(k-1)} \\
&= \sum_{k=3}^n (k-2)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k-2 \end{matrix} \right\} X^{(n-2)-(k-2)} \\
&\quad + 2X \sum_{k=2}^{n-1} (k-1)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k-1 \end{matrix} \right\} X^{(n-2)-(k-1)} + X^2 \sum_{k=1}^{n-2} k! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right\} X^{(n-2)-k} \\
&= \sum_{k'=1}^{n-2} k'! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k' \end{matrix} \right\} X^{(n-2)-k'} \\
&\quad + 2X \sum_{k''=1}^{n-2} k''! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k'' \end{matrix} \right\} X^{(n-2)-k''} + X^2 \sum_{k=1}^{n-2} k! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right\} X^{(n-2)-k} \\
&= A_{n-2}(x) + 2XA_{n-2}(x) + X^2 A_{n-2}(x) \\
&= x^2 A_{n-2}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{n-k-2} &= \sum_{k=0}^{n-2} \left(2k! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right\} X^{n-k-2} + (k+1)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k+1 \end{matrix} \right\} X^{n-k-2} \right) \\
&= 2 \sum_{k=1}^{n-2} k! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k \end{matrix} \right\} X^{(n-2)-k} + X \sum_{k=0}^{n-3} (k+1)! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k+1 \end{matrix} \right\} X^{(n-3)-k} \\
&= 2A_{n-2}(x) + X \sum_{k'=1}^{n-2} k'! \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k' \end{matrix} \right\} X^{(n-2)-k'} \\
&= 2A_{n-2}(x) + XA_{n-2}(x) \\
&= (1+x)A_{n-2}(x)
\end{aligned}$$

となる. よって, $h^*(\mathcal{P}, x) = h_{\Delta}(x) = (x+1)(A_{n-2}(x))^2$ を得る. □

参考文献

- [1] M. Beck and S. Robins, *Computing the continuous discretely integer-point enumeration in polyhedra* second edition, Springer, 2015.
- [2] W. Bruns and J. Gubeladze, *Polytopes, Rings, and K-Theory*, Springer, 2009.
- [3] J. Chifman, S. Petrović, *Toric ideals of phylogenetic invariants for the general group-based model on claw trees $K_{1,n}$* , 2007, in: Proceedings of the Second international conference on Algebraic Biology, (eds. H. Anai, K. Horimoto and T. Kutsia), Springer LNCS **4545**, Springer-Verlag, 307-321.
- [4] P. Conti, C. Traverso, *Buchberger algorithm and integer programming*, 1991, in: Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error correcting codes (AAECC) (H. Mattoson, T. Mora and T. Rao, eds.), Lecture Notes in Computer Science **539**, Springer-Verlag, New York, 130–139.
- [5] P. Diaconis, B. Sturmfels, *Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions*, 1998, Ann. Statist. **26**, 363–397.
- [6] E. Ehrhart, *Polynômes Arithmétiques et Méthode des Polyédres en combinatoire*, Birkhäuser, 1977.
- [7] A. Engström, *Cut ideals of K_4 -minor free graphs are generated by quadratics*, 2011, Michigan Math J. **60**, Issue 3, 705–714.
- [8] J. Herzog, T. Hibi and H. Ohsugi, *Binomial ideals*, Springer, 2018.
- [9] T. Hibi, *A lower bound theorem for Ehrhart polynomials of convex polytopes*, 1994, Adv. Math. **105**, 162–165.
- [10] JST CREST 日比チーム (編), グレブナー道場, 2011, 共立出版
- [11] T. Hibi, K. Nishiyama, H. Ohsugi, A. Shikama, *Many toric ideals generated by quadratic binomials possess no quadratic Gröbner bases*, 2014, Journal of Algebra **408**, 138-146.
- [12] U. Nagel, S. Petrović, *Properties of cut ideals associated to ring graphs*, 2009, J. Commut. Algebra **1**, 547–565.

- [13] H. Ohsugi, *Normality of cut polytopes of graphs is minor closed property*, 2010, Discrete Math. **610**, no. 6–7, 1160–1166.
- [14] H. Ohsugi, *Gorenstein cut polytopes*, 2014, European J. Combin. **38**, 122–129.
- [15] H. Ohsugi, J. Herzog, T. Hibi, *Combinatorial pure subrings*, 2000, Osaka J. Math. **37**, 745–757.
- [16] H. Ohsugi, T. Hibi, *Compressed polytopes, initial ideals and complete multipartite graphs*, 2000, Illinois J. Math. **44**, 391–406.
- [17] T. K. Petersen, *Eulerian Numbers*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher, Birkhäuser/Springer, 2015
- [18] R. Sakamoto, *Lexicographic and reverse lexicographic quadratic Gröbner bases of the cut ideals*, J.Symbolic Compt., to appear.
- [19] R. Sakamoto, *The h^* -polynomial of the cut polytope of $K_{2,m}$ in the lattice spanned by its vertices*, Preprint, 2019, <https://arxiv.org/abs/1904.10667>
- [20] K. Shibata, *Strong Koszulness of the toric ring associated to a cut ideal*, 2015, Comment. Math. Univ. St. Pauli **64**, 71–80
- [21] R. P. Stanley, *Decomposition of rational convex polytopes*, 1980, Ann. Discrete Math. **6**, 333–342.
- [22] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics, volume 1* second edition, Cambridge studies in advanced mathematics, 2012.
- [23] B. Sturmfels, *Gröbner bases of toric varieties*, 1991, Tohoku Math J. **43**, 249–261
- [24] B. Sturmfels, *Gröbner bases and convex polytopes*, 1996, American Mathematical Society (Amer. Math. Soc)
- [25] B. Sturmfels, S. Sullivant, *Toric geometry of cuts and splits*, 2008, Michigan Math J. **57**, 689–709
- [26] S. Sullivant, *Compressed polytopes and statistical disclosure limitation*, 2006, Tohoku Math. J. (2) **58**(3), 433–445
- [27] S. Sullivant, *Toric fiber products*, 2007, Journal of Algebra **316**, 560–577